

131250

Vo

[व
व

VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 26

January 1983

No. 1

-2, 4

रजत जयन्ती विशेषांक

SILVER JUBILEE ISSUE

(1958-1983)



(GK)



131250

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेक्नॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद् इलाहाबाद

विषय सूची

- | | |
|--|--|
| 1. फूरियर श्रेणी की प्रायः नालुण्ड संकलनीयता | एल० एम० त्रिपाठी तथा के० पी० पा |
| 2. नियोडीमियम (III) के द्व्यंगी संकुलों का अध्ययन | वी० के० चित्ताले तथा के० एस० पि |
| 3. फूरियर प्रकार के समाकल संकारक के लिए कतिपय आवेल-प्रमेय | माधवी दिघे तथा वी० एम० भिसे |
| 4. फूरियर श्रेणी के एक वर्ग की संकलनीयता | एम० पी० सचान |
| 5. सालसुत्स प्रमेय का सार्वीकरण | जी० वी० महाजन तथा एस० डब्लू० भालेराव |
| 6. दो चरों वाले H-फलन के लिए प्रसार सूत्र | वी० सी० नायर तथा टी० मोहम्मद |
| 7. अनुरूप श्रेणी | ए० के० दीक्षित तथा ए० एन० गोयल |
| 8. दो चरों वाले परिवर्धित H-फलन के लिए कुछ तत्समक | वाई० एन० प्रसाद तथा पी० एस सि |
| 9. मध्य भारत के कुछ वनों का ऋतुजैविकी प्रेक्षण | सी० डी० आठया |
| 10. तीन चरों वाले अत्यन्त सार्वीकृत फाक्स H-फलन (I) | प्रमिला बापना तथा ए० एन० गोयल |
| 11. थैलिल सल्फाथायाजोल-कॉपर संकुल | कु० शारदा गर्ग, वी० एस० पटेल त
एस० एस० गुप्ता |
| 12. थायोमैलिक अम्ल की सहायता से Ce (IV) का एम्पियरीय अनुमापन | ओ० पी० अग्रवाल, रजनी तथा
एम० पी० खटकड़ |



131250



षय-सूची

1. भारत में आयोजित उपग्रह गोष्ठियाँ ओ० पी० एन० कल्ला, हसीना तथा कालीशंकर 1
2. बहुपदों की एक नवीन कोटि ए० एन० श्रीवास्तव तथा एस० एन० सिंह 15
3. वृत्ताकार झिल्ली का कम्पन पी० सी० मुनोत तथा रेणु माथुर 21
4. दो चरों वाले लागेर बहुपदों के लिए आवर्तन राजेन्द्र नाथ जैन तथा महेश दुवे 27
सम्बन्ध
5. यूरेनिल-3-मेथिल-1-फैनिल-4- (प्रतिस्थापित कमल० के० चतुर्वेदी 33
सल्फोनैमिडो-बेन्जीन-ऐजो) पिरैजोल-5-ओन
की प्रतिजीवाण्विक सक्रियता
6. साइजर के G-फलन वाले सान्त समाकल (श्रीमती) पी० के० मित्तल 41
7. H-फलनों वाले कतिपय सान्त द्विगुण समाकल एस० एन० अगल तथा सी० एल० कौल 49
8. स्टर्लिंग संख्याओं के कतिपय तत्समक बी० के० राय, एस० एन० सिंह तथा बी० पी० सिंह 57
9. कतिपय विस्तारित बरनौली तथा यूलर बहुपदों एस० एन० सिंह, बी० पी० सिंह तथा बी० के० राय 61
का अभिलक्षण वर्णन
10. सान्त समाकल बाई० एन० प्रसाद तथा यू० यस० मिश्र 65
11. फूरियर जैकोबी श्रेणी के चेजारो माध्यों के जे० पी० पोरवाल 77
द्वारा सन्निकटन की कोटि
12. कतिपय द्विसंयोजी धातुओं के 7(- α -सल्फोनैमिडो) कमल के० चतुर्वेदी तथा कु० मनोरमा 83
मेथिल-8-हाइड्राक्सीबिनोलीन संकुलों के गोयल
13. मिश्रित अधिशोषक द्वारा आक्सैलिक अम्ल का के० के० पाण्डेय, गुर प्रसाद तथा बी० एन० सिंह 87
विलगन
14. व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी की गुणनफल संकलनीयता एम० पी० सचान तथा पी० डी० कैथल 95



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 26

April 1983

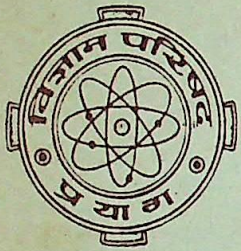
No. 2

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेक्नॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद् इलाहाबाद

विषय-सूची

1. सैट्रिक्स आर्गुमेंट का सैकराबर्ट का E -फलन	एच० एस० धामी	267
2. साइजर परिवर्त के लिए एबेली प्रमेय	आर० एस० पाठक तथा आर० बी० राय	273
3. वितरणीय सार्वोक्त A -परिवर्त का अध्ययन भाग I	वी० के० चतुर्वेदी तथा ए० एन० गोयल	281
4. H फलन वाले समाकल	शान्ति एस० सोनीतथा अर्जुन के० राठी	293
5. H -फलन वाला समाकल	ए० के० राठी	297
6. दो चरों वाले परिवर्द्धित H -फलन की अनन्त श्रेणी के रूपान्तर	वाई० एन० प्रसाद तथा इन्द्र कुमार	301
7. अष्टि में $r_{+3}F_{r+2}$ वाला समाकल समीकरण	बन्दना गुहा	311
8. कतिपय नवीन रंजकों एवं उनके पारद व्युत्पन्नों का संश्लेषण, उनके गुणधर्म तथा औषधीय सक्रियता	अनिल के० गुप्ता, अनिल के० श्रीवास्तव निरूपमा श्रीवास्तव तथा एल० बी० लाल	319
9. अशुद्धिकृत मैग्नीशियम नाइट्रेट का स्पेक्ट्रो- फोटोमीटरीक अध्ययन	एम० एन० बापट	327
10. फूरियर श्रेणी की घूलर संकलनीयता की नई कसौटी	पी० डी० कैथल तथा एच० एल० गुप्ता	331
11. ढालू आधार शैल पर क्षणिक भौम जल प्रवाह के लिए रिट्ज विधि का सम्प्रयोग	वी० एस० पाण्डेय, एस० के० पाण्डेय तथा आर० एस० पाण्डेय	341
12. हाइड्रस फेरिक आक्साइड में कतिपय धनायनिक धातु ऐम्मीनों के विनिमय की गतिकी	ब्रज भूषण	351
13. चर प्रचूषणमय सपाट पट्टिका के ऊपर अस्थायी श्यान असंपीड्य तरल का प्रवाह	नवल किशोर तथा आर० एन० तिवारी	359
14. फलों के सन्निकटीकरण में द्रुति सीमाएं	के० कुरेशी	367
15. स्थिर बिन्दु प्रतिचित्रणों के सम्बन्ध में	ए० के० यू एल तथा पी० एल० शर्मा	373
16. घूलमय तरल का स्थायी समतल MHD प्रवाह	जनार्दन सिंह तथा एस० एन० सिंह	379
17. पृथक्करणीय बानाख अवकाश में अनन्त विभाज्य वितरण	ए० आर० चौरसिया	387



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 26

October 1983

No. 4

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेक्नॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद् इलाहाबाद

अनुसन्धान पत्रिका प्रकाशन की 'रजत जयन्ती'

२५ वर्षों की लम्बी अवधि पार करके 'अनुसन्धान पत्रिका' अपने प्रकाशन के २६ वें वर्ष में प्रवेश कर रही है।

राष्ट्रभाषा हिन्दी में वैज्ञानिक शोधपत्रों को प्रकाशित करने वाली इस एकमात्र शोध पत्रिका का जिस प्रकार सर्वत्र स्वागत हुआ है उससे हमें न केवल प्रोत्साहन मिला है वरन् हमें सन्तोष मिलता रहा है कि हम जिस उद्देश्य से इस पत्रिका का प्रकाशन कर रहे हैं वह सामयिक एवं लाभप्रद रहा है।

इस दीर्घ अवधि में लेखकों ने जो सहयोग दिया है उसके लिये हम उनके आभारी हैं। अभी तक प्रायः ६००० पृष्ठों की शोध सामग्री प्रस्तुत की जा चुकी है जिसका संक्षिप्तीकरण विश्व की सर्वोच्च संस्थाओं द्वारा किया जा रहा है।

यही नहीं, विश्वभर के विभिन्न भाषा-भाषी देशों की शोध पत्रिकाओं तथा संस्थानों से इस पत्रिका का विनिमय-सम्बन्ध स्थापित हो सका, जिससे विज्ञान परिषद् के पास एह वृहद् शोध-पुस्तकालय बन गया है।

हम लेखकों से भविष्य में अधिकाधिक सहयोग की कामना करते हैं। हमारा प्रयास रहेगा कि इस पत्रिका के कलेवर को और आकर्षक बनावें और मुद्रण को अधिक कलात्मक।

हमारे इस संकल्प में विगत दशाब्द से सी०एस० आई० आर०, दिल्ली तथा स्टेट कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेक्नॉलाजी, उत्तर प्रदेश ने जो आर्थिक सहायता प्रदान की है, उसके लिए परिषद् कृतज्ञता प्रकट करती है।

हमारा विश्वास है कि यह शोधपत्रिका देश के प्रत्येक विश्वविद्यालय के प्रत्येक शोधछात्र तक पहुँच सकेगी।

शिव गोपाल मिश्र

प्रबन्ध सम्पादक

Twenty five Years

The publication of Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, a quarterly research Journal of Scientific researches 25 years back in 1958 was a landmark in the history of our National Language, Hindi.

The Patrika since then received patronage from various Universities and Research Institutes of India and abroad.

Authors contributed their research papers unhesitatingly.

Chemical Abstracts Services and Mathematical Reviews very kindly included our Patrika for abstracting. All the research libraries gladly exchanged their Journals for our Patrika.

On the completion of 25 years of successful publication of the Patrika, we congratulate our authors, subscribers, exchange patrons and others for their support and assistance.

We thank C.S.I.R. New Delhi and State Council of Science and Technology, Lucknow for financial assistance for the last decade.

We assure to serve the cause of scientific research through Hindi.

S. G. Misra
Managing Editor

फूरियर श्रेणी की प्रायः नार्लुण्ड संकलनीयता

एल० एम० त्रिपाठी तथा के० पी० पाण्डेय

गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—30 सितम्बर, 1982]

सारांश

एक फूरियर श्रेणी की प्रायः नार्लुण्ड संकलनीयता पर एक प्रमेय की स्थापना की गई है। यह पती के ज्ञात फल के संगत है।

Abstract

On almost Norlund summability of a Fourier series. By L. M. Tripathi and K. P. Pandey, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

A theorem on almost Norlund summability of a Fourier series has been established; it corresponds to a well known result of Pati (1961).

1. माना कि $\sum a_n$ एक अनंत श्रेणी है जिसके n वें आंशिक योगों का अनुक्रम $\{S_n\}$ है। लारेन्टज^[1] ने निम्नलिखित परिभाषा दी है।

परिभाषा : बद्ध अनुक्रम $\{S_n\}$ को सीमा S तक प्रायः अभिसारी कहा जाता है यदि m के प्रति संतत रूप से

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{v=m}^{n+m} S_v = S, \quad (1.1)$$

माना कि $\{p_n\}$ अ-नृण वास्तविक चरों का एक अनुक्रम है और

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad P_{-1} = p_{-1} = 0 \quad (1.2)$$

हम पहली बार यह परिभाषा देते हैं कि श्रेणी Σa_n अथवा अनुक्रम $\{S_n\}$ S के प्रति प्रायः (N, p_n) संकलनीय है यदि m के प्रति संतत रूप से

$$t_{n,m} = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_{n-v} S_{v,m} \quad (1.3)$$

S की ओर अग्रसर हो ज्यों ज्यों $n \rightarrow \infty$, जहाँ

$$S_{v,m} = \frac{1}{v+1} \sum_{k=v}^{v+m} S_k \quad (1.4)$$

माना कि $(-\pi, \pi)$ में 2π - आवर्ती तथा लेबेस्क-समाकलनीय फलन

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \text{ द्वारा दिया जाता है।} \quad (1.5)$$

अब हम लिखेंगे :

$$\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \quad (1.6)$$

$$N_{n,m}(t) = \frac{1}{2\pi P_n} \sum_{v=0}^n P_{n-v} \frac{\cos mt - \cos(v+m+1)t}{2(v+1) \sin^2 t/2} \quad (1.7)$$

$$\tau = [1/t] = 1/t \text{ का समाकल अंश} \quad (1.8)$$

2. पती^[2] ने फूरियर श्रेणी को नालुण्ड संकलनीयता पर निम्नलिखित प्रमेय की स्थापना की है।

प्रमेय A: यदि (N, p_n) एक नियमित नालुण्ड विधि हो जिसे गुणांक $\{p_n\}$ की एक वास्तविक, अतृण समस्वनी अवर्धमान श्रेणी अनुक्रम द्वारा परिभाषित किया जाता है जिससे कि $P_n \rightarrow \infty$ ज्यों-ज्यों $n \rightarrow \infty$ तथा

$$\log n = O(P_n), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

$$\text{तो यदि } \phi(t) = \int_0^t |\phi(u)| du = 0 \left[\frac{t}{P_\tau} \right] \text{ ज्यों-ज्यों } t \rightarrow +0 \quad (2.2)$$

तो श्रेणी (1.4) बिन्दु $t=x$ पर $f(x)$ तक संकलनीय (N, p_n) है।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य अत्यन्त सामान्य अवस्था के अन्तर्गत श्रेणी (1.4) की प्रायः (N, p_n) संकलनीयता के लिए निम्नलिखित फल प्राप्त करना है

प्रमेय: माना कि $\lambda(t)$ तथा $K(t)$ ऐसे दो धनात्मक फलन हैं कि $\lambda(t)$, $K(t)$ तथा $\frac{t\lambda(t)}{K(t)}$ समस्वनिक रीति से t के साथ बढ़ते हैं तथा माना कि $\{p_n\}$ गुणों का एक वास्तविक अनूण समस्वनिक अवर्द्धमान अनुक्रम है जिससे कि $P_n \rightarrow \infty$ ज्यों-ज्यों $n \rightarrow \infty$ । यदि

$$\int_0^t |\phi(u)| du = 0 \left[\frac{\lambda(1/t) p_\tau}{K(P_\tau)} \right] \text{ ज्यों-ज्यों } t \rightarrow 0+ \quad (2.3)$$

$$\text{तथा} \quad \int_{1/n+m}^{1/(n+m)^\delta} \frac{|\phi(u)|}{u} du = 0(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

जहाँ $0 < \delta < 1$, समरूप से m के प्रति, तो श्रृंखला (1.4) बिन्दु $t=x$ पर $f(x)$ के प्रति प्रायः (N, p_n) संकलनीय है बशर्ते कि

$$\lambda(n) P_n = O[K(P_n)], \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

3. हमारी प्रमेय की उपपत्ति के लिए निम्नलिखित प्रमेयिका अनिवार्य है :

प्रमेयिका : यदि $N_{n,m}(t)$ (1.6) के अनुसार हो तो

$$N_{n,m}(t) = \begin{cases} O(n+m), & \text{क्योंकि } 0 < t < \frac{1}{n+m} \\ O(1/t), & \text{क्योंकि } \frac{1}{n+m} < t < \pi \end{cases} \quad (3.1)$$

$$(3.2)$$

प्रमेयिका की उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि

$$N_{n,m}(t) = \frac{1}{2\pi P_n} \sum_{v=0}^n p_{n-v} \frac{\cos mt - \cos(v+m+1)t}{2(v+1) \sin^2 t/2}$$

$$= \frac{1}{2\pi P_n} \sum_{v=0}^n p_{n-v} \frac{\sin\left(m + \frac{v+1}{2}\right) t \sin \frac{v+1}{2} t}{(v+1) \sin^2 t/2}$$

$$= O(n+m), \text{ क्योंकि } 0 < t < \frac{1}{n+m}$$

इसी प्रकार ज्या तथा कोज्या को t के घातों में प्रसारित करने पर

$$N_{n,m}(t) = O(1/t), \text{ क्योंकि } \frac{1}{n+m} < t < \pi.$$

4. प्रमेय की उपरति : श्रेणी (1.4) का n वाँ आंशिक योग

$$S_k(x) - f(x) = 1/2\pi \int_0^\pi \phi(t) \frac{\sin(k + \frac{1}{2})t}{\sin t/2} dt$$

द्वारा दिया जाता है जिससे कि

$$\begin{aligned} S_{v,m} - f(x) &= \frac{1}{v+1} \sum_{k=v}^{v+m} \left\{ S_k - f(x) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi(v+1)} \int_0^\pi \phi(t) \frac{\cos mt - \cos(v+m+1)t}{2 \sin^2 t/2} dt \end{aligned}$$

अब (1.2) की सहायता से

$$\begin{aligned} t_{n,m} - f(x) &= \frac{1}{2\pi P_n} \int_0^\pi \phi(t) \sum_{v=0}^n p_{n-v} \frac{\cos mt - \cos(v+m+1)t}{2(v+1) \sin^2 t/2} dt \\ &= \int_0^\pi \phi(t) N_{n,m}(t) dt \\ &= \left[\int_0^{1/(n+m)} + \int_{1/(n+m)}^{1/(n+m)\delta} + \int_{1/(n+m)\delta}^\pi \right] \phi(t) N_{n,m}(t) dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \text{ माना} \end{aligned} \quad (4.1)$$

पहले I_1 पर विचार करेंगे। अब

$$\begin{aligned} |I_1| &= O \left[\int_0^{1/(n+m)} |\phi(t)| |N_{n,m}(t)| dt \right] \\ &= O(n+m) \int_0^{1/(n+m)} |\phi(t)| dt, (3.1) \text{ से} \\ &= O(n+m) O \left[\frac{\lambda(n+m)p_{n+m}}{K(P_{n+m})} \right] \\ &= O \left[\frac{\lambda(n+m)P_{n+m}}{K(P_{n+m})} \right], \text{ क्योंकि } np_n \leq P_n, \\ &= O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty \text{ (2.5) से } m \text{ के प्रति समरूप से} \end{aligned} \quad (4.2)$$

फिर I_2 पर विचार करने पर, (3.2) की सहायता से

$$|I_2| = O \left[\int_{1/(n+m)}^{1/(n+m)\delta} |\phi(t)|/t dt \right] \\ = O(1), \text{ ज्यों ज्यों } n \rightarrow \infty, (2.4) \text{ से } m \text{ के प्रति समरूप से।} \quad (4.3)$$

अन्त में

$$I_3 = \frac{1}{2\pi P_n} \int_{1/(n+m)\delta}^{\pi} \phi(t) \sum_{v=0}^n P_{n-v} \frac{\cos mt - \cos(v+m+1)t}{2(v+1) \sin^2 t/2} \\ = I_{3.1} - I_{3.2}, \text{ माना}$$

अब द्वितीय माध्यमान प्रमेय का उपयोग करने पर

$$I_{3.1} \leq 1/P_n \sum_{v=0}^n P_{n-v} \frac{1}{2 \sin^2 \{1/2(n+m)\delta\}} \int_{1/(n+m)\delta}^{\epsilon} \phi(t) \cos mt dt,$$

जहाँ $\frac{1}{(n+m)\delta} < \epsilon < \pi,$

$$= O(1), \text{ ज्यों ज्यों } n \rightarrow \infty, \quad (4.4)$$

m के प्रति संतत रूप से।

इसी प्रकार,

$$I_{3.2} = \frac{1}{2\pi P_n} \int_{1/(n+m)\delta}^{\pi} \phi(t) \sum_{v=0}^n P_{n-v} \frac{\cos(v+m+1)t}{2(v+1) \sin^2 t/2} dt$$

$$\leq \frac{1}{2 \sin^2 \{1/2(n+m)\delta\}} \int_{1/(n+m)\delta}^{\pi} |\phi(t)| dt$$

$$= O(1), \text{ ज्यों ज्यों } n \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

के प्रति समरूप से।

(4.1) से (4.5) तक एकत्र करने पर हमें अभीष्ट फल प्राप्त होता है और इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूरी होती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

शोधकार्य हेतु जूनियर-रिसर्च फेलोशिप प्रदान करने के लिए एक लेखक (कमला प्रसाद पाण्डेय) सी०एस०आई०आर० का कृतज्ञ है।

निर्देश

1. लोरेन्ट्ज, जी०जी०, ऐक्टा मैथमैटिका, 1948, 80, 167-190
2. पती, टी०, इण्डियन जर्न० मैथ०, 1961, 3, 85-90

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Vol. 26, No. 1, 1983

नियोडीमियम (III) के द्व्यंगी संकुलों का अध्ययन

वी०के० चित्तले तथा के० एस० पित्रे

रसायन विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—सितम्बर 15, 1981]

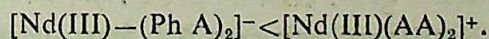
सारांश

थैलिक अम्ल तथा ऐन्थ्रानिलिक अम्ल के साथ नियोडीमियम (III) के द्व्यंगी संकुलों का पोलैरोग्राफीय अध्ययन किया गया है।

Abstract

A study of binary complexes of Neodymium (III) with phthalic acid and anthranilic acid on a dropping mercury electrode. By V.K. Chitale and K.S. Pitre, Department of Chemistry, University of Saugar, Saugar.

A polarographic study of binary complexes of Nd (III) with phthalic acid and anthranilic acid (abbreviated as PhA and AA) has been carried out at a pH 2.4 ± 0.02 . Single well defined reversible three electron reduction waves were obtained for Nd (III) and of its complexes under study. The reduction was found to be diffusion controlled. Ionic strength $\mu = 1.0$ was kept constant by potassium chloride. Both the ligands formed 1 : 2 complex with Nd (III). The stoichiometry of complexes was $[\text{Nd(III)}-(\text{Ph A})_2]^-$ and $[\text{Nd(III)}-(\text{AA})_2]^+$. The stability constants were calculated by the Lingane method and followed the order



थैलिक अम्ल का व्यापक उपयोग विभिन्न धातुओं के साथ कीलेटीकरण के हेतु हुआ है जिसमें चालकतामापी, स्पेक्ट्रम प्रकाशमापी, विभवमापी तथा पोलैरोग्राफी विधियाँ प्रयुक्त हुई हैं^[1-8]। ऐन्थ्रानिलिक अम्ल की कीलेटन-प्रवृत्ति का भी अध्ययन Ln(III) के साथ किया गया है^[9-10] किन्तु प्राप्य साहित्य से

यह सूचित होता है कि धैलिक अम्ल तथा ऐन्थ्रानिलिक अम्ल के साथ Nd(III) के संकरों का अध्ययन अभी तक नहीं हुआ है। प्रस्तुत सूचना में लेखकों ने Nd(III) के थैलेट तथा ऐन्थ्रानिलेट संकरों का संघटन और स्थायित्व स्थिरांक सूचित किया है जिसके लिए विन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड व्यवहृत किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रयुक्त किए गए समस्त रसायन अनालार/बी०डी०एच कोटि के थे। सोडियम थैलेट तथा ऐन्थ्रानिलिक अम्ल के संग्रह विलयन (0.1M) दो बार आसुत जल में तैयार किये गये। धातु विलयन (0.01M) नियोडिमियम आक्साइड की यथेष्ट मात्रा को हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में विलयित करके और अधिक अम्ल को वाष्पन द्वारा सुखा कर अन्त में अवशेष को चालकता जल से निष्कर्षित करके तैयार किया गया। धातु विलय को EDTA विलयन के साथ मानकीकृत किया गया^[11]। पोटैशियम क्लोराइड (2.0M) तथा जिलेटिन (0.1%) विलयनों को दुबारा आसुत जल में तैयार किया गया।

प्रारम्भिक प्रयोगात्मक सेट की तैयारी धातु आयन, आधारी विद्युत-अपघट्य तथा अधिकतम संदमक की समग्र सान्द्रता क्रमशः 1mM, 1.0M तथा 0.01% पर स्थिर करके प्राप्त की गई। अन्य सेटों में लिगेण्ड की सान्द्रता 0.5mM से 30mM के मध्य परिवर्तित की गई। आयनिक शक्ति को पोटैशियम क्लोराइड की आवश्यक मात्रा डाल कर $\mu=1.0$ पर स्थिर रखा गया।

सभी पोलैरोग्राम स्वचालित पेन रिकार्डिंग पोलैरोग्राफ सी आई०आई०(वडौदा) पर अंकित किये गये। पोलैरोग्रामों के अंकन के पूर्व परीक्षण विलयनों में नाइट्रोजन गैस प्रवाहित की गई। केशिका का विवरण इस प्रकार है: $m=8.4 \text{ mg/sec}$, $t=3.0 \text{ sec/drop}$. ($m^{2/3}t^{1/6}=4.963 \text{ mg}^{2/3} \text{ sec}^{-1/2}$) जब पारद स्तम्भ की प्रभावी ऊँचाई 35 सेमी थी और खुले परिपथ में 1.0M पोटैशियम क्लोराइड में मापन किये गए। परीक्षण विलयनों के पी-एच मान को 2.4 ± 0.02 पर बनाये रखने के लिए तनु सोडियम हाइड्रॉक्साइड अथवा हाइड्रोक्लोरिक अम्ल डाला गया और एलिको-डिटिल पी-एच मापी (माडल L1-120) प्रयुक्त हुआ। सभी प्रेक्षण $24 \pm 1^\circ$ से० पर अंकित किये हुए।

परिणाम तथा विवेचना

पोटैशियम क्लोराइड को आधारी विद्युत अपघट्य तथा जिलैटिन को उच्चतम संदमक के रूप में प्रयुक्त करने पर^[12,13] Nd(III) सुस्पष्ट उत्क्रमणीय तीन इलेक्ट्रान अपचयन तरंग ($E_{1/2}=-1.79\text{V Vs SCE}$) प्रदान करता है। Nd(III) तथा इसके संकरों के i_d विपक्ष $\sqrt{h}$ के रैखिक अनुरेख सूचित करते हैं कि अपचयन की प्रकृति विसरण द्वारा नियन्त्रित है। प्रत्येक पोलैरोग्राम का $\log i_d - i$ विपक्ष E_{de} आरेख रैखिक था और उसका ढाल $20 \pm 1\text{mV}$ था जिससे इलेक्ट्रोड प्रक्रम की उत्क्रमणीयता सूचित होती है जिसमें तीन इलेक्ट्रान अपचयन होता है।

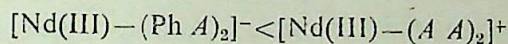
लिंगैण्ड सान्द्रता का प्रभाव

प्रत्येक दशा में लिंगैण्ड की सान्द्रता बढ़ाने से Nd(III) का अर्द्धतरंग विभव अधिक ऋणात्मक हो गया और विसरण धारा घट गई। इससे थैलिक अम्ल तथा ऐन्थ्रानिलिक के साथ Nd(III) का संकर-निर्माण सूचित होता है। $-E_{1/2}$ विपक्ष $\log C_x$ के अनुरेखों में सरल रेखाएँ मिलीं जिससे एकांकी संकर निर्माण सूचित होता है। प्राप्त पोलैरोग्राफी आंकड़ों से संकरों का संघटन तथा उनके स्थायित्व स्थिरांकों की गणना लिंगेन की विधि से की गई।^[14] इन संकरों की स्टाइकियोमीटरी $[\text{Nd(III)}-(\text{Ph A})_2]^-$ तथा $[\text{Nd(III)}-(\text{AA})_2]^+$ पाई गई। स्थायित्व स्थिरांक नीचे दिये जा रहे हैं।

Nd(III) संकरों के स्थायित्व स्थिरांक

	संकर	अनुपात $M : L$	स्थायित्व स्थिरांक
1.	$[\text{Nd(III)}-(\text{Ph A})_2]^-$	1 : 2	$\log \beta_2 = 7.72$
2.	$[\text{Nd(III)}-(\text{AA})_2]^+$	1 : 2	$\log \beta_2 = 8.32$

स्थायित्व स्थिरांकों का क्रम इस प्रकार है :



थैलिक अम्ल की अपेक्षा ऐन्थ्रानिलिक अम्ल में अधिक लिंगैण्ड-निर्माण क्षमता की विवेचना मेसोमरी प्रभाव के कारण की जा सकती है। इसके फलस्वरूप $-\text{COOH}$ समूह के pK मान बढ़ जाते हैं और $-\text{NH}$ समूह की प्रोटान-युक्तता घट जाती है जिससे धातु लिंगैण्ड-निर्माण स्थिरांक बढ़ जाता है जैसा कि पूर्ववर्ती कार्यकर्ताओं ने भी सूचित किया है।^[9,10,15]

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय में से एक (चिताले) विश्वविद्यालय अनुदान आयोग को आर्थिक सहायता हेतु तथा दोनों लेखक सागर विश्वविद्यालय के रसायनाध्यक्ष डा० ए० वी० महाजनी के प्रति प्रयोगशाला सुविधाएं प्रदान करने हेतु आभार व्यक्त करते हैं।

निर्देश

1. टाप, एन०ई० तथा डैवीज़, सी० डब्लू०, J. Chem. Soc., 1940, 87.
2. बाबटेलस्की, एम० तथा बार-गड्डा, आई०, Bull. Soc. Chim, France, 1953, 687.
3. जोसेफ, एन०आर०, J. Biol Chem., 1946, 164, 529.

AP 2

4. घोष, आर० तथा नायर, वी०के०एस०, J. Inorganic nuclear Chem., 1970, **32**, 3033.
5. पल्सीकर, एन०जी०, जहाँगीरदार, डी०वी० तथा खानोलकर, डी०डी०, J. Indian Chem. Soc. 1975, **52**, 134.
6. जैन, डी०एस०, अरविन्द कुमार तथा गौड़, जे०एन०, J. Polarograp. Soc., 1968, **14**, 1.
7. सिंह, एम० तथा सिंह, ए०, J. Indian Chem. Soc., 1979, **56**, 1249.
8. पीकाक, जे०एम० तथा जेम्स, जे०सी०, J. Chem. Soc., 1951, **50**, 307, 2233.
9. सरिन, आर० तथा मुंशी, के०एन०, J. Indian Chem. Soc., 1973, **50**, 307.
10. पित्रे, के०एस०, J. Indian Chem. Soc., 1980, **57**, 1020.
11. वेल्चर, एफ०जे०, 'Analytical uses of EDTA. वाननास्ट्रॉड के०, 1957, पृष्ठ 174-181
12. पित्रे, के०एस० तथा चिताले, वी०के०, Proc. Annu. Convention Chem. (India), 1979, Anal.-5.
13. एस्टी, सी०आर० तथा ग्लाक्लर, जी०, J. Amer. Chem. Soc., 1949, **70**, 1344
14. लिगेन, जे०जे०, Chem. Rev., 1941, 29, 1.
15. चिताले, वी०के० तथा पित्रे, के०एस०, J. Institution Chemists (India), 1982, **54**, 133.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Vol. 26, No. 1, 1983

फूरियर प्रकार के समाकल संकारक के लिए कतिपय आबेल-प्रमेय

माधवी दिघे तथा वी०एम० भिसे

गणित विभाग, गोविन्दराम सेक्सरिया इंस्टीट्यूट आफ साइंस एण्ड टेक्नालॉजी, इन्दौर (म०प्र०)

[प्राप्त—फरवरी 14, 1978]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में फूरियर प्रकार के समाकल संकारक के लिए, जिसकी अंष्टि

$$x^{\sigma+\nu+1} {}_1F_2\left(\frac{\sigma+\nu+1}{2}, \frac{\sigma+\nu+3}{2}, \nu+1 : -\frac{x^2}{4}\right)$$

है, कतिपय आबेल-प्रमेय दिए गए हैं।

Abstract

Some Abelian theorems for a Fourier type integral operator. By Madhavi Dighe and V.M. Bhise, Department of Mathematics, G.S. Institute of Science and Technology, Indore (M P.)

Recently Okikiolu has defined a Fourier type integral operator on suitable spaces of measurable functions on R , as

$$Tf(x) = x^\sigma \int_R t^\nu k(xt) f(t) dt$$

where $k(t)$ is a suitable kernel. In this paper we have given some Abelian theorems for the Fourier type integral operator with kernel as

$$x^{\sigma+\nu+1} {}_1F_2\left(\frac{\sigma+\nu+1}{2}, \frac{\sigma+\nu+3}{2}, \nu+1 : -\frac{x^2}{4}\right)$$

Special cases of these theorems lead to known results by Heywood,

1. प्रस्तावना

हाल ही में संकलन प्रकार तथा सार्वीकृत परिवर्तों के आवेल-प्रमेय प्राप्त किए गए हैं।^[1-3] इस प्रपत्र का मुख्य उद्देश्य फूरियर प्रकार के समाकल संकारक के लिए दो आवेल-प्रमेयों की स्थापना करना है।^[4] ये प्रमेय हावर प्रमेयों के विलोम हैं^[5]। इस कार्य से हेनुड द्वारा दिये गये^[6] प्रमेयों का सार्वीकरण होता है।

2. फूरियर-प्रकार का समाकल संकारक निम्न के द्वारा परिभाषित होता है।

$$H(x) = A \int_0^\infty h(t) (xt)^{\sigma+\nu+1} {}_1F_2\left(-\frac{x^2 t^2}{4}\right) dt \quad (2.1)$$

जहाँ
$$A = \frac{\pi^{1/2}}{2^{n+1/2} (\sigma+\nu+1) \Gamma(\nu+1)} \quad (2.2)$$

तथा σ, ν वास्तविक प्राचल हैं। ${}_1F_2\left(-\frac{x^2}{4}\right)$ फलन

$${}_1F_2\left(\frac{\sigma+\nu+1}{2}; \frac{\sigma+\nu+3}{2}; \nu+1; -\frac{z^2}{4}\right)$$

के लिए आया है। इस प्रपत्र में प्रत्ययों सहित या उनके बिना A तथा K धन अचरों के लिए आये हैं। लघु z के लिए

$$x^{\sigma+\nu+1} {}_1F_2\left(-\frac{z^2}{4}\right) \sim z^{\sigma+\nu+1} \quad (2.3)$$

दीर्घ z के लिए

$$z^{\sigma+\nu+1} {}_1F_2\left(-\frac{z^2}{4}\right) \sim A_1 z^{\sigma-1/2} + A_2 \quad (2.4)$$

जैसा कि ल्यूक^[7] से प्राप्त होता है।

यह मानते हुए कि x धन है तथा $t^{\sigma+\nu+1} h(t) \in L(0, 1)$

$$\int_0^1 |h(t)(xt)^{\sigma+\nu+1} {}_1F_2\left(-\frac{x^2 t^2}{4}\right)| dt \leq x^{\sigma+\nu+1} \int_0^1 |h(t)| t^{\sigma+\nu+1} dt \leq K x^{\sigma+\nu+1} \quad (2.5)$$

अतः

$$I_1(a, b) = \int_a^b x^{-\gamma} dx \int_0^1 h(t)(xt)^{\sigma+\nu+1} {}_1F_2\left(-\frac{x^2 t^2}{4}\right) dt \quad (2.6)$$

$$\leq K \int_a^b x^{-\gamma+\sigma+\nu+1} dx. \quad (2.7)$$

इसलिए जब $0 < a < b < \infty$, तो $I_1(a, b)$ γ , σ तथा ν के समस्त मानों के लिए परम अभिसारी है किन्तु साथ ही $0 = a < b < \infty$ के लिए भी जब $\gamma < \sigma + \nu + 2$ परम अभिसारी है।

यह मानकर कि $t^{\sigma-1/2} h(t) \in L(1, \infty)$ तथा $h(t) \in L(1, \infty)$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty |h(t)(xt)^{\sigma+\nu+1} {}_1F_2\left(-\frac{x^2 t^2}{4}\right)| dt &\leq x^{\sigma-1/2} \left[A_1 \int_1^\infty t^{\sigma-1/2} |h(t)| dt \right. \\ &\quad \left. + A_2 \int_1^\infty |h(t)| dt \right] \leq K_1 x^{\sigma-1/2} + K_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

अतः

$$I_2(a, b) = \int_a^b x^{-\gamma} dt \int_1^\infty h(t)(xt)^{\sigma+\nu+1} {}_1F_2\left(-\frac{x^2 t^2}{4}\right) dt \quad (2.9)$$

$$\leq \int_a^b x^{-\gamma} (K_1 x^{\sigma-1/2} + K_2) dx \quad (2.10)$$

इसलिए $I_2(a, b)$ γ तथा σ के समस्त मानों के लिए जब, $0 < a < b < \infty$ परम अभिसारी है और यह $0 < a < b = \infty$, के लिए भी परम अभिसारी जब $\gamma > \sigma + \frac{1}{2}$ तथा $\gamma > 1$.

3. इस अनुभाग में हम निम्नलिखित आवेल प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 1. माना कि $t^{\sigma+\nu+1} h(t) \in L(0, 1)$, $t^{\sigma-1/2} h(t) \in L(1, \infty)$, $h(t) \in L(1, \infty)$, तथा $0 < \gamma < \sigma + \nu + 1$, $\gamma > \sigma + \frac{1}{2}$, $\nu > -1$ और $H(x)$ (2.1) द्वारा परिभाषित होता है। यदि

$$s \int_s^1 t^{\gamma-1} h(t) dt \sim l \quad \text{ज्यों-ज्यों } s \rightarrow 0+, \quad (3.1)$$

तो इसका अर्थ यह हुआ कि

$$X^{-1} \int_1^X x^{-\gamma} H(x) dx \sim l \lambda \quad (3.2)$$

ज्यों-ज्यों $X \rightarrow \infty$,

$$\lambda = \frac{\pi^{1/2} 2^{-\gamma+\sigma-1/2} \Gamma\left(\frac{-\gamma+\sigma+\nu+1}{2}\right)}{\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma-\sigma+\nu+1}{2}\right)} \quad (3.3)$$

उपपत्ति: (2.6) एवं (2.9) का उपयोग करने पर (3.2) को

$$AX^{-1} [I_1(1, X) + I_2(1, X)] \sim l\lambda$$

के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ A को (2.2) के द्वारा प्राप्त किया जाता है। (2.10) से हमें प्राप्त है कि

$$X^{-1} I_2(1, X) \leq K_1 \cdot \frac{X^{-\gamma+\sigma-1/2}}{-\gamma+\sigma+\frac{1}{2}} + K_2 \frac{X^{-\gamma}}{1-\gamma} - X^{-1} \left[\frac{K_1}{(-\gamma+\sigma+\frac{1}{2})} + \frac{K_2}{(1-\gamma)} \right]$$

जो 0 की ओर अग्रसर होता है ज्यों-ज्यों $X \rightarrow \infty$ क्योंकि $\gamma > 0$, $\gamma > \sigma + \frac{1}{2}$.

अतः
$$AX^{-1} I_1(0, X) \sim l\lambda$$

क्योंकि $I_1(0, 1)$ का अस्तित्व है क्योंकि $\gamma < \sigma + \nu + 1$.

चूँकि $I_1(0, X)$ में द्विगुण समाकल पूर्णतया अभिसारी है क्योंकि $\gamma < \sigma + \nu + 1$, अतः समाकलन के क्रम को बदलने और आन्तरिक समाकल में $xt = \mu$ रखने पर हमें

$$\begin{aligned} AX^{-1} I_1(0, X) &= AX^{-1} \int_0^1 t^{\gamma-1} h(t) dt \int_0^{Xt} u^{-\gamma+\sigma+\nu+1} {}_1F_2\left(-\frac{u^2}{4}\right) du \\ &= X^{-1} \int_0^1 t^{\gamma-1} h(t) J_1(Xt) dt \end{aligned}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$J_1(t) = A \int_0^t u^{-\gamma+\sigma+\nu+1} {}_1F_2\left(-\frac{u^2}{4}\right) du$$

अतः (3.2) सत्य उतरता है यदि

$$X^{-1} \int_0^1 t^{\gamma-1} h(t) J_1(Xt) dt \rightarrow l\lambda \text{ ज्यों-ज्यों } X \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

माना
$$h_1(t) = h(t) - lt^{-\gamma-1} \quad (3.5)$$

तो
$$\begin{aligned} h_2(s) &= \int_s^1 t^{\gamma-1} h_1(t) dt \\ &= O(s^{-1}) \text{ ज्यों-ज्यों } s \rightarrow 0+, \end{aligned} \quad (3.6)$$

[(3.5) तथा (3.1) के उपयोग से]

अतः किसी ज्ञात धन ϵ के लिए, δ को इतना लघु चुना जा सकता है कि

$$|s h_2(s)| < \epsilon \quad (3.7)$$

क्योंकि $0 < s \leq \delta$.

खंडशः समाकलन करने पर

$$X^{-1} \int_0^1 t^{\gamma-1} h_1(t) J_1(Xt) dt = \int_0^1 h_2(t) J'_1(Xt) dt \quad (3.8)$$

समाकलित पद उच्चतर सीमा पर विलुप्त हो जाता है क्योंकि $h_2(1)=0$ तथा निम्नतर सीमा पर भी क्योंकि लघु t तथा धन X के लिए

$$h_2(t) J_1(Xt) = 0 \quad (t^{-1} \int_0^{Xt} u^{-\gamma+\sigma+\nu+1} du) = 0 \quad (t^{-\gamma+\sigma+\nu+1})$$

तथा चूँकि $\gamma < \sigma + \nu + 1$.

पुनश्च, ज्यों-ज्यों $X \rightarrow \infty$, (3.7) को व्यवहृत करने पर

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 h_2(t) J'_1(Xt) dt \right| &\leq A \int_\delta^1 |h_2(t)| {}_1F_2\left(-\frac{X^2 t^2}{4}\right) (Xt)^{-\gamma+\sigma+\nu+1} dt \\ &\quad + A\epsilon \int_0^\delta (Xt)^{-\gamma+\sigma+\nu+1} {}_1F_2\left(-\frac{X^2 t^2}{4}\right) \cdot \frac{dt}{t} \\ &< A \int_\delta^1 |h_2(t)| (Xt)^{-\gamma} [A_1(Xt)^{\sigma-1/2} + A_2] dt \\ &\quad + A\epsilon \int_0^\infty u^{-\gamma+\sigma+\nu} {}_1F_2\left(-\frac{u^2}{4}\right) du \\ &< A_3 X^{-\gamma+\sigma-1/2} K(\delta) + A_4 X^{-\gamma} K_1(\delta) + K_3 \epsilon \quad (3.9) \end{aligned}$$

अन्तिम समाकल का अस्तित्व है क्योंकि $0 < \gamma < \sigma + \nu + 1$, $\gamma > \sigma + \frac{1}{2}$.

इस तरह (3.9) में बायें पक्ष का समाकल 0 की ओर अग्रसर होता है। अतः (3.8) के वाम पक्ष का व्यंजक 0 की ओर अग्रसर होता है ज्यों-ज्यों $X \rightarrow \infty$.

(3.5) की सहायता से हमें

$$\lim_{X \rightarrow \infty} X^{-1} \int_0^1 t^{\gamma-1} h(t) J_1(Xt) dt = \lim_{X \rightarrow \infty} X^{-1} \int_0^1 t^{-2} J_1(Xt) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} l \int_0^x u^{-2} J_1(u) du$$

$$= l \int_0^\infty J_2(y) dy$$

$$= l\lambda.$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$J_2(y) = J_1(1/y)$$

तथा

$$\lambda = \int_0^\infty J_2(y) dy = \frac{\pi^{1/2} 2^{-\gamma+\sigma-1/2} \Gamma\left(\frac{-\gamma+\sigma+\nu+1}{2}\right)}{\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma-\sigma+\nu+1}{2}\right)}$$

समाकल का मान समाकलन के क्रम को बदल कर तथा ल्यूक^[7] के एक ज्ञात समाकल को प्रयुक्त करते हुए निकाला गया है।

इस प्रकार (3.4) की स्थापना हो जाती है और उसी से (3.2) निकलता है।

विशिष्ट दशायें

(i) प्रमेय 1 में $\sigma = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{1}{2}$, से हमें हेवुड^[6] का प्रमेय 5 प्राप्त होता है।

(ii) प्रमेय 1 में $\sigma = -\frac{1}{2}$, $\nu = -\frac{1}{2}$, $h(t) = g(t)$ रखने पर हमें हेवुड^[6] का प्रमेय 6 प्राप्त होता है।

4. इस अनुभाग में हम (3.1) द्वारा परिभाषित फूरियर टाइप संकारक (Operator) के लिए एक अन्य आवेल-प्रमेय को सिद्ध करेंगे जिसमें $(0, 1)$ तथा $(1, \infty)$ अन्तरालों के कार्य परस्पर विनिमय कर दिये जाते हैं।

प्रमेय 2: माना कि $t^{\sigma+\nu+1} h(t) \in L(0, 1)$, $t^{\sigma-1/2} h(t) \in L(1, \infty)$, $h(t) \in L(1, \infty)$

तथा माना $2 < \gamma < \sigma + \nu + 3$, $\gamma > 3/2 + \sigma$, $\nu > -1$

एवं $H(X)$ को (2.1) द्वारा परिभाषित किया जाता है। तब

$$x^{-1} \int_1^x t^{\gamma-1} h(t) dt \sim l \quad \text{ज्यों-ज्यों } x \rightarrow \infty \quad (4.1)$$

जिसका अर्थ है

$$s \int_0^1 x^{-\gamma} H(x) dx \sim l\lambda_1 \text{ ज्यों-ज्यों } s \rightarrow 0+, \quad (4.2)$$

जहाँ

$$\lambda_1 = \frac{\pi^{1/2} 2^{-\gamma+\sigma+3/2} \Gamma\left(\frac{-\gamma+\sigma+\nu+3}{2}\right)}{(\gamma-2) \cdot \Gamma\left(\frac{\gamma-\sigma+\nu-1}{2}\right)}$$

उपपत्ति : (4.2) को निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$sA[I_1(s, 1) + I_2(s, 1)] \sim l\lambda_1$$

जहाँ I_1, I_2 क्रमशः (2.6) एवं (2.9) में दिये हुए हैं।

(2.7) से हमें ज्ञात है कि

$$sI_1(s, 1) \leq K \frac{[s - s^{-\gamma+\sigma+\nu+3}]}{[-\gamma+\sigma+\nu+2]}$$

जो s के साथ 0 को अग्रसर होता है क्योंकि $\gamma < \sigma + \nu + 3$

अतः ज्यों-ज्यों $s \rightarrow 0+$

$$sAI_2(s, 1) \sim l\lambda_1 \quad (4.3)$$

चूँकि $\gamma > \sigma + \frac{3}{2}, \gamma > 2, I_2(1, \infty)$ का अस्तित्व है और हमें ज्ञात है कि

$$sAI_2(s, \infty) \rightarrow l\lambda_1$$

$I_2(s, \infty)$ में समाकलन के क्रम को उलटने से, क्योंकि यह $\gamma > 2, \gamma > \sigma + \frac{3}{2}$ के लिए पूर्णतः अभिसारी है और आन्तरिक समाकल में $xt = u$ रखने पर हमें

$$\begin{aligned} sAI_2(s, \infty) &= sA \int_1^\infty t^{\gamma-1} h(t) dt \int_{st}^\infty u^{-\gamma+\sigma+\nu+1} {}_1F_2\left(-\frac{u^2}{4}\right) du \\ &= s \int_1^\infty t^{\gamma-1} h(t) J_3(st) dt \end{aligned}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$J_3(t) = A \int_1^\infty u^{-\gamma+\sigma+\nu+1} {}_1F_2\left(-\frac{u^2}{4}\right) du \quad (4.4)$$

अतः (4.2) सही उत्तरेगा यदि

$$s \int_1^{\infty} t^{\gamma-1} h(t) J_3(st) dt \rightarrow 0 \text{ ज्यों-ज्यों } s \rightarrow 0+ \quad (4.5)$$

माना
$$h_3(t) = h(t) - t^{1-\gamma} \quad (4.6)$$

तो
$$h_4(x) = \int_1^x t^{\gamma-1} h_3(t) dt = 0(x) \text{ ज्यों-ज्यों } x \rightarrow \infty \quad (4.7)$$

[(4.6) तथा (4.1) की सहायता से]

अतः यदि कोई धन ϵ दिया हुआ हो तो T को इस प्रकार चुना जा सकता है कि

$$|x^{-1} h_4(x)| < \epsilon \text{ जब भी } x \geq T. \quad (4.8)$$

खण्डशः समाकलन करने से

$$s \int_1^{\infty} t^{\gamma-1} h_3(t) J_3(st) dt = -s^2 \int_1^{\infty} h_4(t) J_3'(st) dt \quad (4.9)$$

निम्नतर सीमा पर समाकलित पद लुप्त हो जाता है क्योंकि $h_4(1) = 0$ और ऊपरी सीमा पर भी क्योंकि दीर्घ t तथा स्थिर घन s के लिए

$$\begin{aligned} h_4(t) J_3(st) &= 0 \left(t \int_{st}^{\infty} u^{-\gamma} (A_1 u^{\sigma-1/2} + A_2) du \right. \\ &= 0 (A_1 t^{-\gamma+\sigma+3/2} + A_2 t^{2-\gamma}) \text{ क्योंकि } \gamma > 2, \gamma > \sigma + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

पुनः (4.4) तथा (4.8) से हमें पता चलता है कि ज्यों-ज्यों $s \rightarrow 0+$

$$\begin{aligned} \left| s^2 \int_1^{\infty} h_4(t) J_3'(st) dt \right| &\leq s^2 \int_1^T |h_4(t)| (st)^{-\gamma+\sigma+\nu+1} {}_1F_2 \left(-\frac{s^2 t^2}{4} \right) dt \\ &+ s^2 \int_T^{\infty} \epsilon t (st)^{-\gamma+\sigma+\nu+1} {}_1F_2 \left(-\frac{s^2 t^2}{4} \right) dt \\ &< s^{-\gamma+\sigma+\nu+3} \int_1^T t^{-\gamma+\sigma+\nu+1} |h_4(t)| dt \\ &+ \epsilon \int_1^{\infty} u^{-\gamma+\sigma+\nu+2} {}_1F_2 \left(-\frac{u^2}{4} \right) du \\ &< K(T) s^{-\gamma+\sigma+\nu+3} + K_5 \epsilon \end{aligned} \quad (4.10)$$

अन्तिम समाकल का अस्तित्व है क्योंकि $2 < \gamma < \sigma + \nu + 3$, $\gamma > \sigma + \frac{3}{2}$.

अतः (4.10) का वाम पक्ष 0 की ओर अग्रसर होता है ज्यों-ज्यों $s \rightarrow 0+$

इसलिए इसका अर्थ यह हुआ कि (4.9) के वाम पक्ष का व्यंजक s के साथ 0 को अग्रसर होता है, जो (4.6) की सहायता से

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0+} s \int_1^{\infty} t^{\gamma-1} h(t) J_3(st) dt &= \lim_{s \rightarrow 0+} s \int_1^{\infty} l J_3(st) dt \\ &= l \int_0^{\infty} J_3(u) du \\ &= l \lambda_1 \end{aligned}$$

प्रदान करता है जहाँ

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_0^{\infty} J_3(u) du \\ &= \frac{\pi^{1/2} \cdot 2^{-\gamma+\sigma+3/2} \Gamma\left(\frac{-\gamma+\sigma+\nu+3}{2}\right)}{(\gamma-2) \cdot \Gamma\left(\frac{\gamma-\sigma+\nu-1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

जहाँ समाकल का परिगणन समाकलन के क्रम को बदलने तथा ल्यूक के ज्ञात समाकल^[7] को प्रयोग करने से किया जाता है।

इस प्रकार (4.5) की स्थापना हो जाती है और उससे (4.2) निकल आता है।

विशिष्ट दशाएँ

(i) प्रमेय 2 में $\sigma = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{1}{2}$ होने से हमें हेवुड का प्रमेय 4 विशेष दशा के रूप में प्राप्त होता है।

(ii) प्रमेय 2 में $\sigma = \frac{1}{2}$, $\nu = -\frac{1}{2}$ रखने पर हमें हेवुड का वैसा ही प्रमेय प्राप्त होता है किन्तु इसकी अष्टि $(1 - \cos xt)$ के स्थान पर $\sin xt$ रहती है।

निर्देश

1. एडिगार्जेन, वी०एम०, Akad. Nauk. Arnijan SSR Dokl, 1972, 55, 262-269.

2. दास, जी०एल०, Ranchi Univ. Math. J., 1972, 3, 44-54.
3. मिश्रा, ओ०पी०, गणित, 1968, 19, 93-102.
4. ओकिओलु, जी०ओ० "Aspects of the Theory of Bounded Integral Operators in L_p -spaces." एकेडमिक प्रेस, लन्दन, न्यूयार्क, 1971
5. भिसे, वी०एम० तथा माधवी दिघे (प्रेषित)
6. हेवुड, पी०, Proc. Lond. Math. Soc., 1977, (3) 17, 319-41.
7. ल्यूक, वाई०एल०, "Mathematical Functions and Their Approximations" एकेडमिक प्रेस, 1975

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Vol. 26, No. 1, 1983



फूरियर श्रेणी के एक वर्ग की संकलनीयता

एम० पी० सच्चान

शासकीय महाविद्यालय, शहडोल (म०प्र०)

[प्राप्त—जून 8, 1982]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में फूरियर श्रेणी के अभिसरण के लिए हार्डी तथा लिटलवुड प्रकार के प्रतिबन्ध के अनुरूप प्रतिबन्ध के अन्तर्गत फूरियर श्रेणी के एक वर्ग की टेलर संकलनीयता के हेतु एक प्रमेय की स्थापना की गई है।

Abstract

Taylor summability of a class of Fourier series. By M.P. Sachan, Government College, Shahdol (M.P.)

The author has established in this note, a theorem on Taylor summability of a class of Fourier series under a condition analogous to a Hardy and Littlewood type condition for the convergence of Fourier series.

1. परिभाषा :— एक अनन्त श्रेणी $\sum U_n$ दी हुई है जिसके आंशिक योगफलों का अनुक्रम $\{S_n\}$ है, यदि

$$T_n^r = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n,k}) S_k, \quad (0 \leq r < 1) \quad (1.1)$$

एक सान्त सीमा 'S' को प्रवृत्त होता है ज्यों ज्यों $n \rightarrow \infty$ तो श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ को टेलर माध्यों से S में संकलनीय कहा जाता है जहाँ मैट्रिक्स $\{a_{n,k}\}$ को

$$\frac{(1-r)^{n+1} \theta^n}{(1-r\theta)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n,k}) \theta^k, \quad \text{क्योंकि } |r\theta| < 1 \quad (1.2)$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है और n को कोई भी अन्तः पूर्णांक मान दिया जाता है। माना कि $f(x)$ एक फलन है जो लेबेस्क प्रयोजन में $(-\pi, \pi)$ के ऊपर समाकलनीय है और आवर्त 2π के साथ आवर्ती है। माना कि $f(x)$ से सम्बद्ध फूरियर श्रेणी इस प्रकार है :

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \quad (1.3)$$

हम निम्नांकित संकेतनों का उपयोग करेंगे

$$\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S$$

= [एक धनात्मक अक्षर, जो अनिवार्यतः प्रत्येक बार आने पर वही हो ऐसा नहीं है]

2. प्रस्तावना—यह भलीभाँति ज्ञात है कि टेलर संकलनीयता $0 \leq r < 1$ के लिए नियमित है।^[1] हाल ही में, हालैंड, साहनी तथा जिम्बलैरियो^[2] ने फूरियर श्रेणी की टेलर संकलनीयता के लिए प्रचुर मानदंड दिए हैं और यह सिद्ध किया है कि

प्रमेय(HST)

(i) यदि $\int_0^t |\phi(u)| du = O(t)$, क्योंकि $i \rightarrow O^+$,

तथा

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(i-r)\pi/n}^{\pi} \frac{|\phi(t) - \phi(t + (i-r)\pi/n)|}{t} \exp \left\{ -\frac{nrt^2}{2(1-r)^2} \right\} dt = 0$

जहाँ η धन अक्षर है। तो $f(x)$ की फूरियर श्रेणी S के प्रति x बिन्दु पर टेलर संकलनीय है।

स्पष्ट है कि उपर्युक्त प्रमेय के प्रतिबन्ध फूरियर श्रेणी के अभिसरण के लिए चिरस्मरणीय लेबेस्क परीक्षा के ही अनुरूप हैं। अतः हार्डी तथा लिटलवुड प्रकार के प्रतिबन्ध के अन्तर्गत ऐसे ही फल की आशा की जाती है। इस दृष्टि से हम सिद्ध करेंगे कि

प्रमेय :

यदि $\Phi(t) = \int_0^t |\phi(t)| dt = O\left(\frac{t}{\log 1/t}\right)$, ज्यों-ज्यों $t \rightarrow 0$,

तो बिन्दु x पर फूरियर श्रेणी (1.3) S तक टेलर संकलनीय है।

3. प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी :

प्रमेयिका 1 चूँकि $0 \leq t \leq \pi$ तथा $A > 0$

$$\frac{(1-r)^n}{(1+r^2-2r \cos t)^{n/2}} = O\{\exp(-Ant^2)\}$$

उपपत्ति :

$0 \leq t \leq \pi/2$ के लिए उपपत्ति फोर्बीज^[3] ने दी है। हम स्वतन्त्र रूप से इसे $0 \leq t \leq \pi$ के लिए सिद्ध करेंगे।

हमें ज्ञात है कि

$$\begin{aligned} \frac{(1-r)^n}{(1+r^2-2r \cos t)^{n/2}} &= \frac{(1-r)^n}{\{(1-r)^2+4r \sin^2(t/2)\}^{n/2}} \\ &= \frac{1}{\left\{1 + \frac{4r \sin^2(t/2)}{(1-r)^2}\right\}^{n/2}} \\ &\leq \left[\left\{1 + \frac{4rt^2/\pi^2}{(1-r)^2}\right\}^n \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

चूंकि $0 \leq r < 1$ तथा $\sin t/2 \geq t/\pi$ क्योंकि $0 \leq t \leq \pi$

$$\begin{aligned} &= \left[1 + (2Ant^2) + \frac{(1-1/n)}{2!} (2Ant^2)^2 + \dots \right]^{-1/2} \\ &= O[e^{2Ant^2}]^{-1/2} \\ &= O\{\exp(-Ant^2)\}, \text{ क्योंकि } 2At^2 = \frac{4rt^2}{\pi^2(1+r)^2} < 1, \end{aligned}$$

प्रमेयिका 2. यदि मैट्रिक्स $\{a_{n,k}\}$ को (1.2) द्वारा परिभाषित किया जाय तो

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_{n,k}) \sin kt = \frac{(1-r)^{n+1} \sin \left\{ nt + (n+1) \tan^{-1} \left(\frac{r \sin t}{1-r \cos t} \right) \right\}}{(1+r^2-2r \cos t)^{(n+1)/2}}$$

उपपत्ति : (1.2) का उपयोग करने पर

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n,k}) \sin(kt) &= I_m \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n,k}) e^{ikt} \right\} \\ &= I_m \left[\frac{(1-r)^{n+1} e^{int}}{(1-re^{it})^{n+1}} \right] \\ &= I_m \left[\frac{(1-r)^{n+1} e^{int}}{R^{n+1} e^{-i(n+1)\theta}} \right] \end{aligned}$$

जहाँ $1-re^{it} = Re^{-i\theta}$

$$= \frac{(1-r)^{n+1}}{R^{n+1}} \sin\{nt + (n+1)V\}$$

$$= \frac{(1-r)^{n+1} \sin \left\{ nt + (n+1) \tan^{-1} \left(\frac{r \sin t}{1-r \cos t} \right) \right\}}{(1+r^2-2r \cos t)^{n+1/2}}$$

4. हम निम्नलिखित अनुमान (estimate) का भी प्रयोग करेंगे जिसे सरलता से सम्पुष्ट किया जा सकता है

$$\sin \left\{ (nt + (n+1) \tan^{-1} \left(\frac{r \sin t}{1-r \cos t} \right)) \right\}$$

$$= O\left(\frac{nt}{1-r}\right), \text{ क्योंकि } 0 < t < 1/n \quad (4.1)$$

5. प्रमेय की उत्पत्ति

फूरियर श्रेणी (1.3) का n वाँ आंशिक योगफल इस प्रकार दिया जाता है [4]

$$S_n - S = 1/\pi \int_0^\pi \frac{\phi(t)}{t} \sin nt \, dt + O(1) \quad (5.1)$$

(5.1), परिभाषाएँ (1.1) तथा (1.2) एवं प्रमेयिका 2 को उपयोग करने पर S_n के टेलर परिवर्त T_n^r को

$$T_n^r - S = 1/\pi \int_0^\pi \frac{\phi(t)}{t} \left\{ \sum_{k=0}^\infty (a_{n,k}) \sin(kt) \right\} dt + O(1)$$

$$= 1/\pi \int_0^\pi \frac{\phi(t)}{t} \frac{(1-r)^{n+1} \sin \left\{ nt + (n+1) \tan^{-1} \left(\frac{r \sin t}{1-r \cos t} \right) \right\} dt}{(1+r^2-2r \cos t)^{n+1/2}} + O(1)$$

$$= \frac{(1-r)^{n+1}}{\pi} \left[\int_0^{1-r/n} + \int_{1-r/n}^{(1-r/n)\alpha} + \int_{(1-r/n)\alpha}^\pi \right] \frac{\phi(t)}{t}$$

$$\frac{\sin \left\{ nt + (n+1) \tan^{-1} \left(\frac{r \sin t}{1-r \cos t} \right) \right\} dt}{(1+r^2-2r \cos t)^{n+1/2}} + O(1)$$

$$= \frac{1}{\pi} [P_1 + P_2 + P_3] + O(1) \text{ द्वारा प्रदर्शित करते हैं जहाँ } 0 < \alpha < 1/2 \quad (5.2)$$

(4.1), द्वितीय माध्यमान प्रमेय तथा (2.1) के सम्प्रयोग से

$$|P_1| = (1-r)^{n+1} \int_0^{1-r/n} \frac{|\phi(t)|}{t} \frac{O\left(\frac{nt}{1-r}\right)}{(1+r^2-2r \cos t)^{n+1/2}} dt$$

$$\begin{aligned}
&= O\left(\frac{n}{1-r}\right) \int_0^{1-r/n} |\phi(t)| dt \\
&= O\left(\frac{n}{1-r}\right) \cdot O\left(\frac{1-r}{n}\right) \\
&= O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

प्रमेयिका 1, खण्डशः समाकलन तथा (2.1) का उपयोग करने पर

$$\begin{aligned}
|P_2| &= \int_{1-r/n}^{(1-r)/n\alpha} \frac{|\phi(t)|}{t} O[\exp\{-A(n+1)t^2\}] dt \\
&= O\left[\exp\left\{-A(n+1)\frac{(1-r)^2}{n^2}\right\}\right] \int_{1-r/n}^{(1-r)/n\alpha} \frac{|\phi(t)|}{t} dt \\
&= O(1) \left[O(1) + \int_{1-r/n}^{(1-r)/n\alpha} O\left\{\frac{1}{t \log(1/t)}\right\} dt \right] \\
&= O(1) + O(\log \alpha) \\
&= O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty, \text{ क्योंकि } 0 < \alpha < 1/2,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

अन्त में, प्रमेयिका 1, द्वितीय माध्यमान प्रमेय तथा समाकल $\int |\phi(t)| dt$ के सातत्य अंश से

$$\begin{aligned}
|P_3| &= \int_{(1-r/n)^\alpha}^{\pi} \frac{|\phi(t)|}{t} O[\exp\{-A(n+1)t^2\}] dt \\
&= O\left[\left(\frac{n}{1-r}\right)^\alpha \exp\left\{-A(n+1)\left(\frac{1-r}{n}\right)^{2\alpha}\right\}\right] \int_{(1-r/n)^\alpha}^{\pi} |\phi(t)| dt \\
&= O\left[\frac{n^\alpha}{\exp(A n^{1-2\alpha})}\right] \\
&= O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty, \text{ क्योंकि } \alpha < 1/2.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

(5.2), (5.3), (5.4) तथा (5.5), को संयुक्त करने पर

$$T_n^r - S = O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty.$$

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस प्रपत्र की तैयारी में डा० पी० डी० कैथल, प्रोफेसर, गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, भाहडोल ने जो मार्गदर्शन किया उसके लिए लेखक आभार व्यक्त करता है।

निर्देश

1. हार्डी, जी०एच०, Divergent Series. आक्सफोर्ड यूनिवर्सिटी प्रेस, 1956
2. हालैंड, ए०एस०बी०, साहनी, बी०एन० तथा जिम्बलारियो, कनै०मैथ० बुले०, 1979, 22 (3), 345-350
3. फार्बीज, आर०एल०, वही, 1965, 8, 797-808
4. जिगमुंड, ए०, Trigonometrical Series. कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, 1960

सालसुत्स प्रमेय का सार्वीकरण

जी०बी० महाजन

गणित विभाग, शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, रीवा (म०प्र०)

तथा

एस०डब्लू० भालेराव

गणित विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, सतना (म०प्र०)

[प्राप्त—जनवरी 1, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में सालसुत्स प्रमेय का सार्वीकरण प्राप्त किया गया है।

Abstract

On generalization of Saalschutz's theorem. By G. B. Mahajan, Department of Mathematics, Government Science College, Rewa and S.W. Bhalerao, Department of Mathematics, Government P.G. College, Satna.

In the present paper, the authors have obtained a generalization in several variables of Saalschutz's theorem (1.4) below. As an application of this result, a known transformation formula due to Toscano [13] has been rederived. The method of our proof is direct and simple.

- हम निम्नांकित पर विचार करेंगे

$$F^{(r)} \left[\begin{matrix} (a_A) : \left(b_{B_1}^{(1)} \right); \dots; \left(b_{B_r}^{(r)} \right); \\ (c_C) : \left(d_{D_1}^{(1)} \right); \dots; \left(d_{D_r}^{(r)} \right); \end{matrix} \quad x_1; \dots; x_r \right]$$

$$= \sum_{k_1, \dots, k_r=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^A (ai)_k \prod_{i=1}^{B_1} \left(b_i^{(1)} \right)_{k_1} \dots \prod_{i=1}^{B_r} \left(b_i^{(r)} \right)_{k_r}}{\prod_{i=1}^C (Ci)_k \prod_{i=1}^{D_1} \left(d_i^{(1)} \right)_{k_1} \dots \prod_{i=1}^{D_r} \left(d_i^{(r)} \right)_{k_r}} \frac{\prod_{i=1}^r x_i^{k_i}}{k_i!} \quad (1.1)$$

$$\text{जहाँ हमने संक्षिप्त करने के लिए } K=k_1 + \dots k_r \quad (1.2)$$

$$\text{तथा } (a)_n = \frac{\sqrt{(a+n)}}{\sqrt{a}} = a(a-1) \dots (a+n-1), (a)_0 = 1 \quad (1.3)$$

रख दिया है। नीचे लिखा r सुविधा की दृष्टि से चरों की संख्या बताने के लिए है। साथ ही (1.1) में $A+B_i \leq C+D_i$ किन्तु यदि $A+B_i = C+D_i+1$ हो तो $|x_i|, i=1, \dots, r$ को इस प्रकार सीमित करना होगा जिससे निहित श्रेणी परम अभिसारी हो। रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है।

(1.1) की श्रेणी श्रीवास्तव तथा डाउस्ट^[9] द्वारा दी गई बहुगुणित हाइपरज्यामितीय श्रेणी की विशिष्ट दशा है।

सूत्र :

$${}_3F_2 \left[\begin{matrix} a, b, -n; \\ c, d; \end{matrix} 1 \right] = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n} \quad (1.4)$$

जहाँ n अनृण पूर्णाङ्क है तथा

$$c+d=1+a+b-n \quad (1.5)$$

साल सुत्स प्रमेय (1935) है।

हाल के वर्षों में कालिट्ज,^[2-5] जैन,^[6,7] सिंह,^[11,12] श्रीवास्तव^[9] तथा अन्यो ने सार्विकृत हाइपरज्यामितीय फलनों ${}_pF_q$ तथा कैपे द फेरी के द्विगुण हाइपरज्यामितीय फलनों के विभिन्न प्रश्नों का मूल्यांकन किया है। प्रस्तुत प्रपत्र में सालसुत्स प्रमेय (1.4) के सार्विकरण प्राप्त करने का प्रयास किया गया है। निस्सन्देह हम प्रदर्शित करेंगे कि

$$F^{(n)} \left[\begin{matrix} a, b; -m_1; \dots; -m_r; \\ c, d; -; \dots; -; \end{matrix} 1, \dots, 1 \right] = \frac{(c-a)_M (c-b)_M}{(c)_M (c-a-b)_M} \quad (1.6)$$

जहाँ $c+d=1+a+b-M$ तथा पूर्ववत्

$$M=m_1 + \dots + m_r \quad (1.7)$$

यहाँ सभी m अनृण संख्याएँ हैं और a, b, c, m पर आश्रित नहीं हैं। जब a, b, c, m पर आश्रित हो तो इस प्रमेय की उपपत्ति सहज ही प्राप्त की जा सकती है अतः इसे छोड़ा जा सकता है (देखें वेली^[1] तथा रेनविले^[8])।

2. निम्नलिखित पर विचार करें

$$\begin{aligned}\Omega &= F^{(r)} \left[a, b; -m_1; \dots; -m_r; \right. \\ &\quad \left. c, d; - \quad ; \dots; - \quad ; 1, \dots, 1 \right] \\ &= \sum_{k_1=0}^{m_1} \dots \sum_{k_r=0}^{m_r} \frac{(a)_{k_1+\dots+k_r} (b)_{k_1+\dots+k_r}}{(c)_{k_1+\dots+k_r} (d)_{k_1+\dots+k_r}} \prod_{i=1}^r \frac{(-m_i)_{k_i}}{k_i!} \\ &= \sum_{k_r=0}^{m_r} \sum_{k_1=0}^{\min(m_1, k_r)} \dots \sum_{k_{r-1}=0}^{\min(m_{r-1}, k_r)} \frac{(a)_{k_r} (b)_{k_r}}{(c)_{k_r} (d)_{k_r}} \times \\ &\quad \sum_{i=1}^{r-1} \left[\frac{(-m_i)_{k_i}}{k_i!} \right] \frac{(-m_r)_{k_r - (k_1 + \dots + k_{r-1})}}{(k_r - (k_1 + \dots + k_{r-1}))!}\end{aligned}$$

चूँकि $(-r)_s = \frac{(-1)^{s,r}!}{(r-s)!}$ तथा $(a)_{r-s} = \frac{(a)_r (-1)^s}{(1-a-r)_s}$, (2.1)

$$0 \leq s \leq r,$$

अतः हमें

$$\Omega = \sum_{k_r=0}^{m_r} \frac{(a)_{k_r} (b)_{k_r} (-m)_{k_r}}{(c)_{k_r} (d)_{k_r} k_r!}$$

$$F_D^{(r)}[-k_r, -m_1, \dots, -m_{r-1}; 1+m_r-k_r; 1, \dots, 1]$$

प्राप्त होता है जहाँ $F_D^{(r)}$ से r चरों वाले लारीसेला के हाइपरज्यामितीय फलन का चतुर्थ प्रकार सूचित होता है। अब आन्तरिक योगफल का मान विख्यात सूत्र

$$F_D^{(r)}[\alpha, \beta_1, \dots, \beta_r; \lambda; 1, \dots, 1] = \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\lambda - \alpha - \beta_1 - \dots - \beta_r)}{\Gamma(\lambda - \alpha) \Gamma(\lambda - \beta_1 - \dots - \beta_r)} \quad (2.2)$$

$$\operatorname{Re}(\lambda - \alpha - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_r) > 0$$

से ज्ञात करने पर हमें

$$\Omega = \sum_{k_r=0}^M \frac{(a)_{k_r} (b)_{k_r} (-M)_{k_r}}{(c)_{k_r} (d)_{k_r} k_r!}$$

प्राप्त होता है जिससे (1.4) के परिप्रेक्ष्य में तुरन्त ही (1.6) प्राप्त होता है।

3. टोस्कैनो^[13] ने निम्नलिखित परिवर्त सूत्र को सिद्ध किया है

$$(1-t)^{-\lambda-m} \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{x_i t}{1-t} \right)^{-\beta_i}$$

$$\times F_D^{(r)} \left[-m, \beta_1, \dots, \beta_r; \lambda; \frac{x_1}{1-t+x_1t}, \dots, \frac{x_r}{1-t+x_rt} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+m)_n t^n}{n!} F_D^{(r)} [-m-n, \beta_1, \dots, \beta_r; \lambda; x_1, \dots, x_r] \quad (3.1)$$

इस अनुभाग में (1.6) का प्रयोग करते हुए हम (3.1) की एक वैकल्पिक उपपत्ति देगे। हमारा विचार है कि यह उपपत्ति सीधी तथा सरल है। (3.1) के वामपक्ष को L से सूचित करने पर

$$L = (1-t)^{-\lambda-m} \sum_{k_1+\dots+k_r \leq m} \frac{(-m)_k}{(\lambda)_k} (1-t)^{-k}$$

$$\times \prod_{i=1}^r \left[\frac{(\beta_i)_{k_i}}{k_i!} x_i^{k_i} \left(1 + \frac{x_i t}{1-t} \right)^{-\beta_i-k_i} \right]$$

$$= \sum_{k_1+\dots+k_r \leq m} \frac{(-m)_k}{(\lambda)_k} \sum_{s_1, \dots, s_r=0}^{\infty} \prod_{i=1}^r \left[\frac{(\beta_i)_{k_i+s_i}}{k_i! s_i!} x_i^{k_i+s_i} \right]$$

$$\times (-t)^s (1-t)^{-(\lambda+m+k+s)}$$

यह आसानी से देखा जा सकता है कि

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n \quad (3.2)$$

यहाँ पर $K=k_1+\dots+k_r$ तथा $S=s_1+\dots+s_r$ संकलन के क्रम को विनिमयित करने पर जो इस प्रक्रम में सन्निहित परम अभिसारी श्रेणी के कारण वैध है, हमें

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s_1, \dots, s_r=0}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_r \leq m} \frac{\sum (\lambda+m+k+s)_n (-m)_k}{n! (\lambda)_k}$$

$$\times (-1)^s \prod_{i=1}^r \left[\frac{(\beta_i)_{k_i+s_i}}{k_i! s_i!} x_i^{k_i+s_i} \right] t^{n+s}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s_1, \dots, s_r \leq n} \dots \sum_{k_1=0}^{\min(m, s_1)} \dots \sum_{k_r=0}^{\min(m, s_r)} \frac{(\lambda+m+s)_{n-s+k}}{(n-s+k)!}$$

$$\times \frac{(-m)_k}{(\lambda)_k} (-1)^{s-k} \prod_{i=1}^r \left[\frac{(\beta_i)_{s_i}}{k_i! (s_i-k_i)} x_i^{s_i} \right] t^n$$

प्राप्त होता है। अब सप्रवन्ध (2.4) का उपयोग करने पर

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda+m)_n}{n!} t^n \sum_{s_1, \dots, s_r \leq n} \frac{(-n)_s}{(\lambda+m)_s} \prod_{i=1}^r \left[\frac{(\beta_i)_{s_i} (x_i)^{s_i}}{s_i!} \right] \\ \times F^{(r)} \left[\begin{matrix} \lambda+m+n, -m : s_1; \dots; s_r; \\ \lambda; 1+n-s : -; \dots; -; \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1; \dots 1 \end{matrix} \right]$$

अन्त में (1.6) का सम्प्रयोग करने पर हमें सूत्र (3.1) तुरन्त प्राप्त हो जाता है।

निर्देश

1. वैली, डब्लू० एन०, Generalized Hypergeometric series, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, 1935
2. कार्लिट्ज, एल०, Rend. Semi Mat. Univ. Podova, 1967, 230-233
3. वही, Mathematiche (Catania), 1967, 22, 138-142
4. वही, जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०, 1963, 38, 415-418
5. वही, Rend. Semi. Mat. Univ. Podova, 1965, 34, 200-203
6. जैन, आर० एन०, Matematiche (Catania), 1966, 21
7. वही, प्रोसी० नेशनल एके० साइंस, (इण्डिया), 1970, A, 215-18
8. रेनविले, ई० डी०, Special Function, मैकमिलन, न्यूयार्क, 1960
9. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा डाउस्ट, एम० सी०, Nederl. Akad. Wetesch. Proc, Indog Math. 1969, 72A, 31, 449-457
10. श्रीवास्तव, जी० पी०, (प्रकाशनाधीन)
11. सिंघल, आर० पी०, Math. Student, 1982, 327-330
12. वही, Rend. Semi. Mat. Univ. Podova, 1968, (XLI) 227-234
13. टोस्कैनो, एल०, Mathematiche (Catania), 1972, 27, 219-250

दो चरों वाले H -फलन के लिए प्रसार सूत्र

वी० सी० नायर

रीजनल इंजीनियरिंग कालेज, कालीकट

तथा

टी० मोहम्मद

सर सय्यद कालेज, टालिपरम्बा, केरल

[प्राप्त—जून 16, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य दो चरों वाले H -फलन के लिए $\Sigma(H \pm iH)$ रूप में एक प्रसार सूत्र का परिचय देना है।

Abstract

An expansion formula for the H -function of two variables. By V. C. Nair, Regional Engineering College, Calicut and T. Mohamed, Sir Syed College, Tali-paramba, Kerala State.

The object of this paper is to introduce an expansion formula for the H -function of two variables in the form $\Sigma(H \pm iH)$. Results involving various special functions are deduced. A result recently proved by Agrawal and Singhal [1, p. 38] is one of them.

1. प्रयुक्त परिभाषाएं तथा परिणाम

(a_p, A_p) से प्राचलों $(a_1, A_1), (a_2, A_2), \dots, (a_p, A_p)$ के p युग्मों के समुच्चय का बोध होता है, तथा

$(a_p; a_p, A_p)$ से प्राचलों $(a_1; a_1, A_1), (a_2; a_2, A_2), \dots, (a_p; a_p, A_p)$ के p त्रिकों के समुच्चय का बोध होता है।

AP 5

दो चरों वाले H -फलन को मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल के पदों में निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया है^[3]

$$H(x, y) = \left[\begin{array}{cc|c} \left(\begin{smallmatrix} m_1, n_1 \\ p_1, q_1 \end{smallmatrix} \right) & \left(\begin{smallmatrix} a_{p_1}, a_{q_1}, A_{p_1} \\ b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1} \end{smallmatrix} \right) & x \\ \left(\begin{smallmatrix} m_2, n_2 \\ p_2, q_2 \end{smallmatrix} \right) & \left(\begin{smallmatrix} c_{p_2}, C_{p_2} \\ d_{q_2}, D_{q_2} \end{smallmatrix} \right) & \\ \left(\begin{smallmatrix} m_3, n_3 \\ p_3, q_3 \end{smallmatrix} \right) & \left(\begin{smallmatrix} e_{p_3}, E_{p_3} \\ f_{q_3}, F_{q_3} \end{smallmatrix} \right) & y \end{array} \right] \\ = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{L_1} \int_{L_2} m(s, t) x^s y^t ds dt, \quad (1.1)$$

जहाँ

$$m(s, t) = \frac{\prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1 - a_j + a_j s + A_j t) \prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(b_j - \beta_j s - B_j t)}{\prod_{n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j - a_j s - A_j t) \prod_{m_1+1}^{q_1} \Gamma(1 - b_j + \beta_j s + B_j t)} \\ \times \frac{\prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1 - c_j + C_j s) \prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j - D_j s) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1 - e_j + E_j t) \prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(f_j - F_j t)}{\prod_{n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j - C_j s) \prod_{m_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - d_j + D_j s) \prod_{n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j - E_j t) \prod_{m_3+1}^{q_3} \Gamma(1 - f_j + F_j t)} \quad (1.2)$$

x तथा y शून्य के तुल्य नहीं है और रिक्त गुणनफल को इकाई माना गया है। यह नहीं m_i, n_i, p_i, q_i भी ऐसी अनृण संख्याएँ हैं कि $0 \leq n_i \leq p_i, 0 \leq m_i \leq q_i, (i = 1, 2, 3); a, b, c, d, e, f$ समिश्र संख्याएँ हैं और $\alpha, \beta, A, B, C, D, E, F$ को घनात्मक मान लिया गया है।

L_1 के कंटूर $i\infty$ से $+i\infty$ तक s तल पर इस प्रकार विस्तीर्ण हैं कि $\Gamma(d_j - D_j s), j=1, 2, \dots, m_2; \Gamma(b_j - \beta_j s - B_j t), j=1, 2, \dots, m_1$, के पोल L_1 के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1 - c_j + C_j s), j=1, 2, \dots, n_2; \Gamma(1 - a_j + a_j s + A_j t), j=1, 2, \dots, n_1$ के पोल बाईं ओर पड़ें।

L_2 के कंटूर $-i\infty$ से $+i\infty$ तक t तल पर इस प्रकार विस्तीर्ण है कि $\Gamma(f_j - F_j t), j=1, 2, \dots, m_3; \Gamma(b_j - \beta_j s - B_j t), j=1, 2, \dots, m_1$ के पोल L_2 के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1 - e_j + E_j t), j=1, 2, \dots, n_3; \Gamma(1 - a_j + a_j s + A_j t), j=1, 2, \dots, n_1$ के पोल बाईं ओर पड़ें।

(1.1) के वाम पक्ष के समाकल अभिसारी होते हैं जब

$$|\arg x| < \frac{1}{2}\theta\pi \quad \text{तथा} \quad |\arg y| < \frac{1}{2}\varphi\pi$$

$$\begin{aligned} \text{जहाँ } \theta &= \sum_{j=1}^{n_1} a_j + \sum_{j=1}^{n_2} C_j + \sum_{j=1}^{m_1} B_j + \sum_{j=1}^{m_2} D_j - \sum_{n_1+1}^{p_1} a_j - \sum_{n_2+1}^{p_2} C_j - \sum_{m_1+1}^{q_1} B_j - \sum_{m_2+1}^{q_2} D_j > 0 \\ \varphi &= \sum_{j=1}^{n_1} A_j + \sum_{j=1}^{n_3} E_j + \sum_{j=1}^{m_1} B_j + \sum_{j=1}^{m_3} F_j - \sum_{n_1+1}^{p_1} A_j - \sum_{n_3+1}^{p_3} E_j - \sum_{m_1+1}^{q_1} B_j - \sum_{m_3+1}^{q_3} F_j > 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

जहाँ $m=0$ (1.1) मित्तल तथा गुप्ता [2] द्वारा परिभाषित दो चरों वाले H फलन में समानीत हो जाता है। जब $m_1=n_1=p_1=q_1=0$, तो (1.1) दो H -फलनों के गुणनफल में टूट जाता है।

$$H \left[\begin{array}{cc|cc|c} (0, & 0) & & & x \\ (0, & 0) & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & y \end{array} \right] =$$

$$H_{p_2, q_2}^{m_2, n_2} \left[x \left| \begin{array}{cc} (c_{p_2}, & C_{p_2}) \\ (d_{q_2}, & D_{q_2}) \end{array} \right. \right] H_{p_3, q_3}^{m_3, n_3} \left[y \left| \begin{array}{cc} (e_{p_3}, & E_{p_3}) \\ (f_{q_3}, & F_{q_3}) \end{array} \right. \right], \quad (1.4)$$

और आगे, $m_3=q_3=1$, $n_3=p_3=0$, $f_1=0$, $F_1=1$ रखने तथा $y \rightarrow 0$ होने पर हमें (1.4) निम्न रूप में प्राप्त होता है

$$H_{p_2, q_2}^{m_2, n_2} \left[x \left| \begin{array}{cc} (c_{p_2}, & C_{p_2}) \\ (d_{q_2}, & D_{q_2}) \end{array} \right. \right] \quad (1.5)$$

अग्रवाल तथा सिंघल [1] द्वारा सिद्ध किये गये निम्नलिखित परिणाम की आवश्यकता होगी।

$$\frac{\Gamma(s/2) \Gamma(1-s/2)}{\Gamma(rs/2) \Gamma(1-rs/2)} = \pi e^{\pm i(r+1/2)} \pi s \sum_{k=1}^r \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}ks) \Gamma(\frac{1}{2}-ks)} \pm i \frac{1}{\Gamma(1+ks) \Gamma(-ks)} \right] \quad (1.6)$$

2. सूत्र

सूत्र I

$$H \left[\begin{array}{cc|cc|c} (m_1+1, n_1+1) & (1, u/2, v/2), (a_{p_1}; a_{p_1}, A_{p_1}), (1; ur/2, vr/2) & & & x \\ (p_1+2, q_1+2) & (1; u/2, v/2), (b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1}), (1; ur/2, vr/2) & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & y \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \sum_{k=1}^r \left\{ H \left[\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} m_1, n_1 \\ p_1+1, q_1+1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (a_{p_1}; a_{p_1}, A_{p_1}), (\frac{1}{2}; uk, vk) \\ (b_{q_1}; \beta_{q_1}, \beta_{q_1}), (\frac{1}{2}; uk, vk) \end{pmatrix} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array} \right] \begin{array}{c} x e^{\pm i(r+1/2) \pi u} \\ \cdots \\ y e^{\pm i(r+1/2) \pi v} \end{array} \right\} \\
&\pm iH \left[\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} m_1, n_1 \\ p_1+1, q_1+1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (a_{p_1}; a_{p_1}, A_{p_1}), (0; uk, vk) \\ (b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1}), (0; uk, vk) \end{pmatrix} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array} \right] \begin{array}{c} x e^{\pm i(r+1/2) \pi u} \\ \cdots \\ y e^{\pm i(r+1/2) \pi v} \end{array} \right\} \quad (2.1)
\end{aligned}$$

बशर्ते कि $\theta > 0, |\arg x \pm \left(\frac{r+1}{2}\right) \pi u| < \theta - 2ru,$

$\varphi > 0, |\arg y \pm \left(\frac{r+1}{2}\right) \pi v| < \varphi - 2rv.$

उपपत्ति : (1.6) में s के स्थान पर $us+vt$ लिखें, दोनों पक्षों में $\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 m(s, t) x^s y^t$

से गुणा करके तथा L_1 तथा L_2 के साथ s तथा t के प्रति समाकलित करें।

$$\begin{aligned}
&H \left[\begin{array}{c|c} \cdots & \cdots \\ \begin{pmatrix} m_2+1, n_2+1 \\ p_2+2, q_2+2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (1-v/2, u/2), (c_{p_2}, C_{p_2}), (1-vr/2, ur/2) \\ (1-v/2, u/2), (d_{q_2}, D_{q_2}), (1-vr/2, ur/2) \end{pmatrix} \\ \cdots & \cdots \end{array} \right] \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \\
&= \pi e^{\pm i(r+1/2) \pi v}
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{k=1}^r \left\{ H \left[\begin{array}{c|c} \cdots & \cdots \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2+1, q_2+1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (c_{p_2}, C_{p_2}), (\frac{1}{2}-kv, ku) \\ (d_{q_2}, D_{q_2}), (\frac{1}{2}-kv, ku) \end{pmatrix} \\ \cdots & \cdots \end{array} \right] \begin{array}{c} x e^{\pm i(r+1/2) \pi u} \\ y \end{array} \right\}$$

$$\pm iH \left[\begin{array}{c} \dots \\ (m_2, n_2) \\ (p_2+1, q_2+1) \\ \dots \end{array} \middle| \begin{array}{c} \dots \\ (c_{p_2}, C_{p_2}), (-kv, ku) \\ (d_{q_2}, D_{q_2}), (-kv, ku) \\ \dots \end{array} \middle| \begin{array}{c} x e^{\pm i(r+1/2)\pi u} \\ y \end{array} \right] \quad (2.2)$$

बशर्ते कि $|\arg x| < \pi/2 (\theta + u - ur)$, $|\arg x \pm (r+1/2)\pi u| < \pi/2 (\theta - 2ru)$, $|\arg y| < \frac{1}{2}\varphi\pi$, $\theta > 0$, $\varphi > 0$.

उपपत्ति : (1.6) में s के स्थान पर $us+v$ रखें, दोनों पक्षों को $(1/2\pi i)^2 m(s, t) x^s y^t$ से गुणा करें तथा L_1 एवं L_2 के साथ-साथ s तथा t के प्रति समान लिखित करें।

3. विशिष्ट दशाएँ

$$m_1=n_1=p_1=q_1=0, m_3=q_3=1, n_3=p_3=0, f_1=0, F_1=1$$

रखने तथा (2.2) में $y \rightarrow 0$ करने पर

$$\begin{aligned} & H_{p_2+2, q_2+2}^{m_2+1, n_2+1} \left[x \middle| \begin{array}{c} (1-v/2, u/2), (c_{p_2}, C_{p_2}), (1-ur/2, ur/2) \\ (1-v/2, u/2), (d_{q_2}, D_{q_2}), (1-vr/2, ur/2) \end{array} \right] \\ &= \pi e^{\pm i(r+1/2)\pi v} \sum_{k=1}^r \left\{ H_{p_2+1, q_2+1}^{m_2, n_2} \left[x e^{\pm i(r+1/2)\pi u} \middle| \begin{array}{c} (c_{p_2}, C_{p_2}), (\frac{1}{2}-kv, ku) \\ (d_{q_2}, D_{q_2}), (\frac{1}{2}-kv, ku) \end{array} \right] \right\} \\ & \pm i H_{p_2+1, q_2+1}^{m_2, n_2} \left[x e^{\pm i(r+1/2)\pi u} \middle| \begin{array}{c} (c_{p_2}, C_{p_2}), (-kv, ku) \\ (d_{q_2}, D_{q_2}), (-kv, ku) \end{array} \right] \right\} \quad (3.1) \end{aligned}$$

बशर्ते कि निहित H-फलनों का अस्तित्व हो।

(3.1) में (c_{p_2}, C_{p_2}) को $(1-rv/2, ru/2)$, (c_{p_2}, C_{p_2}) , $(1-v/2, u/2)$ तथा (d_{q_2}, D_{q_2}) को $(-rv, ru)$, $(\frac{1}{2}-rv, ru)$, $(1-rv/2, ru/2)$, (d_{q_2}, D_{q_2}) , $(1-v/2, u/2)$ से प्रतिस्थापित करने पर तथा $u=i$, $v=0$ रखने पर अग्रवाल तथा सिंघल^[1] द्वारा सिद्ध परिणाम की प्राप्ति होती है।

(3.1) में $m_2=1$, $n_2=0$, $p_2=0$, $q_2=1$, $u=C_{p_2}=D_{q_2}=1$, $c_{p_2}=0$, $d_{q_2}=2k-v$, $r=1$ रखने पर निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$W_{-k, -k}(x) = \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi(2k-1/2)}$$

$$\times \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + 2k)} W_{k, -k}(-x) \pm i \frac{1}{\Gamma(1 + 2k)} M_{k, k}(-x) \right] \quad (3.2)$$

निर्देश

1. अग्रवाल, बी० एम० तथा सिंघल, बी० एम०, विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1977, 20, 35-39
2. मित्रल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, प्रोसी० नेशनल एके० साइन्स इण्डिया, 1972, 75, 117-123.
3. श्रीवास्तव, एच० एन० पी०, विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1978, 21, 315-319.

अनुरूप श्रेणी

ए० के० दीक्षित तथा ए० एन० गोयल

गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—दिसम्बर 21, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में फाक्स के H -फलन वाली अनेक अनुरूप श्रेणियाँ तथा मित्तल-गुप्ता द्वारा दिये गये इसके दो चरों वाले एक सार्वीकरण को लिया गया है।

Analogous series. By A.K. Dixit and A.N. Goyal, Department of Mathematics, Rajasthan University, Jaipur.

We prove the following analogous series involving H -function of Fox and generalized H -function of two variables due to Mittal and Gupta.

$$\sum_{u,v,w=0}^{\infty} A_{u,v,w} H_{P+1,Q+1}^{M,N+1} \left[\begin{matrix} ba^h \\ (f_Q, F_Q)(1-D-L, h) \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1-D, h)(e_P, E_P) \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho+2n)\Gamma(\rho+n)}{n!} {}_4F_3[y] H_{1,1}^{0,1 : M, N; 1,0} \left[\begin{matrix} ba^h \\ 4z^2a^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{matrix} \right]$$

where ϕ stands for $(1-R; h, 2) : (e_l, E_P); -$ and ϕ_2 stands for $(1-R-L; h, z) : (f_Q; F_Q); (n+\frac{\rho}{2}, 1) \left(-n-\frac{\rho}{2}, 1\right)$ provided that $H(ba^h)$ and $H(ba^h, 4z^2a^2)$ both exist where $H(x)$ is due to Fox, $H(x, y)$ extension of $H(x)$ due to Mittal and Gupta.

1. प्रस्तावना तथा संकेतन

प्रस्तुत प्रपत्र में फाक्स के H -फलन वाली अनेक अनुरूप श्रेणियाँ तथा मित्तल-गुप्ता द्वारा दिये गये इसके एक सार्वीकरण को स्थान दिया गया है। श्रेणी के कथन तथा उपपत्तियों में निम्नलिखित संकेतनों एवं ज्ञात फलों का उपयोग किया जावेगा।

1) $f(t)=0(t^{\rho+1})t \rightarrow 0$ के लिये तथा $0(t-a)^{\rho+2} t \rightarrow a$ तब (1.1), (1.2) तथा मथाई और सक्सेना^[5] के प्रपत्र में उद्धृत ज्ञात फल का उपयोग करने पर हमें

$$\sum_{u,v,w=0}^{\infty} A_{u,v,w} \int_0^a t^{\rho+w+2v} f(t) dt$$

$$= 1/\Delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho+2n)\Gamma(\rho+n)}{n!} {}_4F_3[y] \int_0^a J_{\rho+2n}(4tz) f(t) dt \quad (2.2)$$

प्राप्त होता है। यदि हम

$$f(t) = t^{R-1}(a-t)^{L-1} H_{P,Q}^{M,N} \left[b t^h \left| \begin{matrix} (e_P, E_P) \\ (f_Q, F_Q) \end{matrix} \right. \right] \quad (2.3)$$

रखें और गोयल के ज्ञात फल^[3] का उपयोग करें तो (3.1) तुरन्त प्राप्त होता है।

3. विशिष्ट दशायें

(i) यदि $M=Q=h=1$, $N=P=0$, $f_1=F_1=1$ तथा मथाई और सक्सेना^[3] द्वारा उद्धृत एक ज्ञात फल का उपयोग करें तो

$$\sum_{u,v,w=0}^{\infty} A_{u,v,w} \frac{\Gamma(D+\sigma)}{\Gamma(D+L+\sigma)} F_1(D+\sigma; D+L+\sigma; -ab)$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho+2n)\Gamma(\rho+n)}{n!} {}_4F_3[y]$$

$$\times H_{1,1:0,1;0,2}^{0,1:1,0;1,0} \left[\begin{matrix} ab \\ 4a^2z^2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{matrix} \right. \right] \quad (3.1)$$

जहाँ $\phi_3(1-R; 1, 2) : \dots; \dots$, के लिए

तथा $\phi_4(1-R-L; 1, 2) : (\sigma, 1); (n+\rho/2, 1)(-n-\rho/2, 1)$ के लिए आया है।

(ii) $M=2$, $N=P=0$, $Q=h=F_1=1$ तथा $f_1=\sigma$ रखने और मथाई तथा सक्सेना^[5] द्वारा उद्धृत एक अन्य ज्ञात फल का उपयोग करने पर

$$\sum_{u,v,w=0}^{\infty} A_{u,v,w} \Gamma(1-L) \Gamma(D+\sigma) e^{ab/2} (ab)^{\sigma-D-L/2} w_{-D-\sigma/2, D+\sigma-1/2}(ab)$$

$$= 1/\Delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho+2n)\Gamma(\rho+n)}{n!} {}_4F_3[y] H_{1,1:0,2;0,2}^{0,1:2,0;1,0} \left[\begin{matrix} ab \\ 4a^2z^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \phi_5 \\ \phi_6 \end{matrix} \right] \quad (3.2)$$

जहाँ ϕ_5 से $(1-R; 1, 2) : \dots; \dots$

तथा ϕ_6 से $(1-R-L; 1, 2) : (\sigma, 1)(1-D-L, 1); (n+\rho/2, 1)(-n-\rho/2, 1)$ सूचित होता है।

(iii) $M=N=P=h=E_1=1, Q=3, e_1=1/2-D, f_1=L-D, f_2=1/2-D-\sigma, f_3=1/2-D+\sigma, F_1=F_2=F_3=1$ रखने और मथाई तथा सक्सेना^[5] द्वारा उद्धृत एक फल का उपयोग

करने पर

$$\begin{aligned} & \sum_{u,v,w=0}^{\infty} A_{u,v,w} J_{L+\sigma-1/2}(\Gamma ab) J_{L-\sigma-1/2}(\Gamma ab) \\ &= \pi^{-1/2} (ab)^{D-1/2} \frac{1}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho+2n)\Gamma(\rho+n)}{n!} {}_4F_3[y] \\ & \times H_{1,1:2,3;0,2}^{0,1:1,2;1,0} \left[\begin{matrix} ab \\ 4a^2z^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \phi_7 \\ \phi_8 \end{matrix} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

जहाँ ϕ_7 से $(1-R; 1, 2) : (1-D, 1)(1/2-D, 1); \dots; \dots$

तथा ϕ_8 से $(1-R-L; 1, 2) : (L-D, 1)(1/2-D-\sigma, 1)(1/2-D+\sigma, 1); (n+\rho/2, 1)(-n-\rho/2, 1)$

सूचित होता है।

(iv) यदि हम $M=N=P=Q=h=1, e_1=\mu_1, E_1=1, f_1=\lambda_1, F_1=1$ लिखें और मथाई तथा सक्सेना^[5] द्वारा उद्धृत फल का उपयोग करें तो

$$\begin{aligned} & \sum_{u,v,w=0}^{\infty} A_{u,v,w} \frac{\Gamma(\lambda_1+D-L)\Gamma(\lambda_1-\mu_1-1)}{\Gamma(\lambda_1+D+L-1)} \\ & {}_2F_1(\lambda_1+D-L, \lambda_1-\mu_1-1; \lambda_1+D+L-1; -ab) \\ &= \frac{(ab)^{-1}}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho+2n)\Gamma(\rho+n)}{n!} {}_4F_3[y] \\ & \times H_{1,1:1,1;0,2}^{0,1:1,1;1,0} \left[\begin{matrix} ab \\ 4a^2z^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \phi_9 \\ \phi_{10} \end{matrix} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

जहाँ $\phi_9 (1-R; 1, 2) : (\mu_1, 1); \dots$ के लिए

तथा $\phi_{10} (1-R-L; 1, 2) : (\lambda_1, 1); (n+\rho/2, 1)(-n-\rho/2, 1)$ के लिए आया है।

(v) माना $M=2, N=P=0, Q=h=F_1=1, D=1/2, f_1=L=1/2$, तथा मथाई और सक्सेना^[5]

द्वारा उद्धृत ज्ञात फल का उपयोग करने पर

$$\sum_{u,v,w=0}^{\infty} A_{u,v,w} K_{L-1/2}(ab/2) = \frac{\pi^{-1/2} e^{-ab/2}}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho+2n)\Gamma(\rho+n)}{n!} {}_4F_3[y]$$

$$\times H_{1,1:0,2,0,2}^{0,1:2,0,1,0} \left[\begin{matrix} ab \\ 4a^2 z^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{matrix} \right]$$

जहाँ ϕ_{11} से $(1-R; 1, 2) : \dots; \dots$,

तथा ϕ_{12} से $(1-R-L; 1, 2) : (L-1/2, 1)(-L+1/2, 1); (n+\rho/2, 1)(-n-\rho/2, 1)$ सूचित होता है।

(vi) $M=2, N=h=F_1=F_2=1, D=1/2, Q=2, f_1=L-1/2, f_2=0$ रखने और मथाई तथा सक्सेना^[5] द्वारा उद्धृत फल का उपयोग करने पर

$$\sum_{u,v,w=0}^{\infty} A_{u,v,w} I_{L-1/2}(\sqrt{ab}) K_{L-1/2}(\sqrt{ab})$$

$$= 1/2 \Delta \pi^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho+2n)\Gamma(\rho+n)}{n!} {}_4F_3[y]$$

$$\times H_{1,1:0,2,0,2}^{0,1:2,0,1,0} \left[\begin{matrix} ab \\ 4z^2 a^2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \phi_{13} \\ \phi_{14} \end{matrix} \right]$$

जहाँ ϕ_{13} से $(1-R; 1, 2) : \dots; \dots$

तथा ϕ_{14} से $(1-R-L; 1, 2) : (L-1/2, 1)(0, 1); (n+\rho/2, 1)(-n-\rho/2, 1)$ सूचित होता है। प्राचलों के उपयुक्त ढंग से विशिष्टीकरण द्वारा अधिक विशिष्ट दशायें प्राप्त की जा सकती हैं जिनका उल्लेख यहाँ नहीं किया जा रहा है।

निर्देश

1. अल-सलम, डब्लू० ए० तथा कार्लिट्ज, एस०, J. Math. and Mech., 1963, **12**, 911-34
2. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **98**, 395-429.
3. गोयल, जी०के०, पी० एच० डी० थीसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
4. मिश्र, पी०के० तथा गुप्ता, के०सी०, Proc. Indian Acad. Sci., 1972, **A75**, 117-123
5. मथार्ड, ए०एम० तथा सक्सेना, आर० के० The H-function with applications in Statistics and other Disciplines. विले ईस्टर्न लि०, 1978
6. श्रीवास्तव, एच०एम० तथा पंडा, आर०, J. reine angew Math., 1976, **283/284**, 265-274

दो चरों वाले परिवर्धित H-फलन के लिए कुछ तत्समक

वाई० एन० प्रसाद तथा पी० एस० सिंह

सम्प्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी
बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—नवम्बर 16, 1981]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य दो चरों वाले परिवर्धित H-फलन के लिए कुछ तत्समकों की स्थापना करना है।

Abstract

Some identities for modified H-function of two variables. By Y. N. Prasad and P. S. Singh, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

The object of this paper is to establish some identities for modified H-function of two variables. The results are believed to be new and are generalizations of the results obtained by Srivastava^[2].

1. प्रस्तावना

दो चरों वाले परिवर्धित H-फलनों को प्रसाद तथा प्रसाद^[1] ने निम्न प्रकार से परिभाषित एवं प्रदर्शित किया है :

$$H[x, y] = {}_H^{m_1, n_1; m_2, n_2 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[\begin{matrix} \{(a_{p_1}; a_{p_1}, A_{p_1})\}; \\ p_1, q_1; p_2, q_2 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4] \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \{(b_{q_1}; b_{q_1}, B_{q_1})\}; \\ \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}; E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}; G_{p_4})\} \\ \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}; F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}; H_{q_4})\} \end{matrix} \right] \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t) \theta_1(s) \theta_2(t) x^s y^t ds dt \quad (1.1)$$

$$\text{जहाँ } \phi(s, t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(b_j - \beta_j s - B_j t) \prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1 - \alpha_j + \alpha_j s + A_j t) \prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j - \delta_j s + D_j t)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1} \Gamma(1 - b_j + \beta_j s + B_j t) \prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j - \alpha_j s - A_j t) \prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - d_j + \delta_j s - D_j t)}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1 - c_j + \gamma_j s - C_j t)}{\prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j - \gamma_j s + C_j t)} \quad (1.2)$$

$$\theta_1(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(f_j - F_j s) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1 - e_j + E_j s)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3} \Gamma(1 - f_j + F_j s) \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j - E_j s)} \quad (1.3)$$

$$\theta_2(t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_4} \Gamma(h_j - H_j t) \prod_{j=1}^{n_4} \Gamma(1 - g_j + G_j t)}{\prod_{j=m_4+1}^{q_4} \Gamma(1 - h_j + H_j t) \prod_{j=1}^{p_4} \Gamma(g_j - G_j t)} \quad (1.4)$$

जहाँ x तथा y शून्य नहीं हैं एवं रिक्त गुणनफल इकाई है। द्विगुण समाकलों के अभिसरण के अन्य समस्त प्रतिबन्ध प्रसाद तथा प्रसाद^[1] के शोधपत्र में दिये हुए हैं। (1.1) द्वारा परिभाषित H -फलन (1.2) में दिये गये मिश्रित संकेत गामा फलन कारकों के कारण परिवर्धित फलन है

यहाँ यह उल्लेखनीय है कि (1.1) द्वारा परिभाषित परिवर्धित H -फलन x तथा y का वैश्लेषिक फलन है यदि

$$R = \sum_{j=1}^{p_1} \alpha_j - \sum_{j=1}^{q_1} \beta_j - \sum_{j=1}^{q_2} \delta_j + \sum_{j=1}^{p_2} \gamma_j - \sum_{j=1}^{q_3} F_j + \sum_{j=1}^{p_3} E_j \geq 0, \quad (1.5)$$

$$S = \sum_{j=1}^{p_1} A_j - \sum_{j=1}^{q_1} B_j + \sum_{j=1}^{q_2} D_j - \sum_{j=1}^{p_2} C_j - \sum_{j=1}^{p_4} H_j + \sum_{j=1}^{p_4} G_j \geq 0, \quad (1.6)$$

1) पुनः द्विगुण कंदूर समाकल (1.1) परम अभिसारी होता है यदि

$$|\arg x| < \frac{1}{2} U\pi, U > 0; |\arg y| < \frac{1}{2} V\pi, V > 0 \quad (1.7)$$

जहाँ

$$U = \sum_{j=n}^{m_1} \beta_j - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} \beta_j + \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j - \sum_{j=m_2+1}^{p_1} \alpha_j + \sum_{j=1}^{m_2} d_j - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} \delta_j$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_j - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} \gamma_j + \sum_{j=4}^{m_3} F_j - \sum_{j=m_3+1}^{q_3} F_j + \sum_{j=1}^{n_3} E_j - \sum_{j=n_3+1}^{p_3} E_j \quad (1.8)$$

तथा

$$V = \sum_{j=1}^{m_1} B_j - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} B_j + \sum_{j=1}^{n_1} A_j - \sum_{j=n_2+1}^{p_1} A_j + \sum_{j=1}^{m_2} D_j - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} D_j$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_2} C_j - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} C_j + \sum_{j=1}^{m_4} H_j - \sum_{j=m_3+1}^{q_4} H_j + \sum_{j=1}^{n_4} G_j - \sum_{j=n_4+1}^{p_2} G_j. \quad (1.9)$$

2. इस अनुभाग में हम अपने निम्नांकित मुख्य फलों की स्थापना करेंगे :

$$H_{p_1+2, q_1+1; p_2+2, q_2+1 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+2; m_2, n_2+2; (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(1; h, h), (1-k; v, v), \{(h_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}, \right. \\ \left. \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; (1; h, h), (1-k; v, v), \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \right. \\ \left. (2-k; v, v); \{(d_{q_2}, \delta_{q_2}, D_{q_2})\}, (2-k; v, v) : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \right] \\ = (k-1)^2 H_{p_1+1, q_1; p_2+1, q_2 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+1; m_2, n_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(1; h, h), \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \right. \\ \left. \{(b_{p_1}, \alpha_1, B_{q_1})\}; (1; h, h), \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \right. \\ \left. \{(d_{q_2}, \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \right] \\ + \frac{v}{h} (k-1) H_{p_1+1, q_1; p_2+1, q_2 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+1; m_2, n_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(0; h, h), \{(q_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \right. \\ \left. \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; (1; h, h), \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \right. \\ \left. \{(d_{q_2}, \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{v}{h} (k-1) H_{p_1+1, q_1; p_2+1, q_2 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+1; m_2, n_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(1; h, h), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \right. \\
& \quad \left. (0; h, h), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \right] \\
& \quad \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \\
& + \frac{v^2}{h^2} H_{p_1+1, q_1; p_2+1, q_2 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+1; m_2, n_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(0; h, h), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \right. \\
& \quad \left. \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \right. \\
& \quad \left. (0; h, h), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \right] \\
& \quad \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \quad (2.1)
\end{aligned}$$

बशर्ते कि $|\arg x| < \frac{1}{2}(U+2h)\pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2}(v+2h)\pi$, जहाँ h धन संख्या है और U तथा V को क्रमशः समीकरण (1.8) तथा (1.9) द्वारा दिया जाता है।

$$\begin{aligned}
& H_{p_1+2, q_1+1; p_2+2, q_2+1 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+1; m_2, n_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(1; h, h), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \right. \\
& \quad \left. (k+1; v, v), \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \right. \\
& \quad \left. (k; v, v); (1; h, h), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\}, (k; v, v) : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \right] \\
& \quad \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \\
& = K^2 H_{p_1+1, q_1; p_2+1, q_2 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+1; m_2, n_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(1; h, h), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \right. \\
& \quad \left. \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \right. \\
& \quad \left. (1; h, h), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \right] \\
& \quad \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \\
& - \frac{vk}{h} H_{p_1+1, q_1; p_2+1, q_2 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+1; m_2, n_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(0; h, h), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \right. \\
& \quad \left. \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \right. \\
& \quad \left. (1; h, h), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \right] \\
& \quad \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \\
& - \frac{vk}{h} H_{p_1+1, q_1; p_2+1, q_2 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+1; m_2, n_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(1; h, h), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \right. \\
& \quad \left. \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \right. \\
& \quad \left. (0; h, h), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \right] \\
& \quad \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{v^2}{h^2} H_{p_1-1; q_1; p_2+1, q_2 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+1; m_2, n_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[\begin{array}{l} (0, h, h), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \\ \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \\ (0; h, h), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}; E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}; G_{p_4})\} \\ \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}; F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}; H_{q_4})\} \end{array} \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \right] \quad (2.2)
\end{aligned}$$

बशर्ते कि (2.1) में दिये गये प्रतिबन्धों की तुष्टि हो।

$$\begin{aligned}
& k H_{p_1+2, q_1+1; p_2+2, q_2+1 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+2; m_2, n_2+2 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[\begin{array}{l} (1; h, h), (1-k; \alpha, \alpha), \\ \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1}), \\ \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; (1; a, h), (1-k; \alpha, \alpha), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}; E_{p_3}); \\ (-k; \alpha, \alpha); \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\}, (-k; \alpha, \alpha) : \{(f_{q_3}; F_{q_3})\}; \\ \{(g_{p_4}; G_{p_4})\} \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \\ \{(h_{q_4}; H_{q_4})\} \end{array} \right] \\
& = H_{p_1+1, q_1; p_2+1, q_2 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+1; m_2, n_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[\begin{array}{l} (1; h, h), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \\ \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \\ (1; h, h), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}; E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}; G_{p_4})\} \\ \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\}; \{(f_{q_3}; F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}; H_{q_4})\} \end{array} \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \right] \\
& - \frac{a}{h} H_{p_1+2, q_1+1; p_2+1, q_2 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+2; m_2, n_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[\begin{array}{l} (0; h, h), (1-k, \alpha, \alpha), \\ \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1}), \\ \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; (1; h, h), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}; E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}; G_{p_4})\} \\ (-k, \alpha, \alpha); \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\}; \{(f_{q_3}; F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}; H_{q_4})\} \end{array} \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \right] \\
& - \frac{a}{h} H_{p_1+1, q_1; p_2+2, q_2+1 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+1; m_2, n_2+2 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[\begin{array}{l} (1; h, h), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \\ \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \\ (0; h, h), (1-k; \alpha, \alpha), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}; E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}; G_{p_4})\} \\ \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\}, (-k; \alpha, \alpha) : \{(f_{q_3}; F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}; H_{q_4})\} \end{array} \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \right] \\
& + \frac{a^2}{h^2} H_{p_1+2, q_1+1; p_2+2, q_2+1 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+2; m_2, n_2+2 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[\begin{array}{l} (0; h, h), (1-k; \alpha, \alpha), \\ \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \\ \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; (0; h, h), (1-k; \alpha, \alpha), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \\ (-k; \alpha, \alpha); \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\}, (-k; \alpha, \alpha); \{(f_{q_3}; F_{q_3})\}; \\ \{(e_{p_3}; E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}; G_{p_4})\} \\ \{(h_{q_4}; H_{q_4})\} \end{array} \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \right] \quad (2.3)
\end{aligned}$$

बशात् कि (2.1) में दिये गये प्रतिबन्धों की दृष्टि हो ।

$$\begin{aligned}
 & 2l H_{p_1+3, q_1+3; p_2+3, q_2+3 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(1; h, h), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \right. \\
 & \quad \left. (\frac{1}{2}k; h, h), (k-l+1; h, h); (1; h, h), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\}, (\frac{1}{2}k; h, h), \right. \\
 & \quad \left. (l; h, h), \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; (k; h, h), (\frac{1}{2}k+1; h, h), (l; h, h), \right. \\
 & \quad \left. (k-l+1; h, h) : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \right. \\
 & \quad \left. \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \right] \\
 & = H_{p_1+2, q_1+2; p_2+2, q_2+2 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(1; h, h), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, \right. \\
 & \quad \left. (1+k-l; h, h); (1; h, h), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\}, (1+k-l; h, h) : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \right. \\
 & \quad \left. \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; (k+1; h, h), (l+1; h, h), \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \right. \\
 & \quad \left. \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \right] \\
 & + H_{p_1+2, q_1+2; p_2+2, q_2+2 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(0; h, h), \right. \\
 & \quad \left. (k; h, h), (l; h, h), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, (k-l; h, h); (1; h, h), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\}, (1+k-l; h, h); \right. \\
 & \quad \left. \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; (k+1; h, h), (l+1; h, h), \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\}; \right. \\
 & \quad \left. \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \right. \\
 & \quad \left. \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \right] \\
 & + H_{p_1+2, q_1+2; p_2+2, q_2+2 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(1; h, h), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, \right. \\
 & \quad \left. (k+1; h, h), (l+1; h, h), (1+k-l; h, h); (0; h, h), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\}, (k-l; h, h); \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \right. \\
 & \quad \left. \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; (k; h, h), (l; h, h), \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \right. \\
 & \quad \left. \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \right. \\
 & \quad \left. \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \right] \\
 & + H_{p_1+2, q_1+2; p_2+2, q_2+2 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(0; h, h), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, \right. \\
 & \quad \left. (k; h, h), (l; h, h), (k-l; h, h); (0; h, h), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\}, (k-l; h, h) : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \right. \\
 & \quad \left. \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; (k; h, h), (l; h, h), \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \right. \\
 & \quad \left. \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right. \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

बशर्ते कि $|\arg x| < \frac{1}{2}(U+4h)\pi$, $|\arg y| < \frac{1}{2}(V+4h)\pi$, जहाँ h घन संख्या है और U तथा V को क्रमशः समीकरण (1.8) तथा (1.8) द्वारा दिया जाता है।

$$\begin{aligned}
 & H_{p_1, q_1; p_2, q_2 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[\{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \{c_{p_2}, \gamma_{p_2}, C_{p_2}\} : \right. \\
 & \quad \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \{(d_{q_2}, \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \\
 & \quad \left. \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \mid x \right. \\
 & \quad \left. \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \mid y \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i, -i} \frac{1}{(i)^2} e^{ik\pi} H_{p_1+1, q_1+1; p_2+1, q_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \\
 & \quad \left[(k; h, h); \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; (k; h, h); \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \right. \\
 & \quad \left. (k; h, h); \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; (k; h, h); \{(d_{q_2}, \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \right. \\
 & \quad \left. \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \mid x e^{-2ih\pi} \right. \\
 & \quad \left. \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \mid y \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i, -i} \frac{1}{(i)^2} H_{p_1+1, q_1+1; p_2+1, q_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \\
 & \quad \left[(k; h, h); \{(a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; (k; h, h); \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2}, C_{p_2})\}; \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \right. \\
 & \quad \left. (k; h, h); \{(b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; (k; h, h); \{(d_{q_2}, \delta_{q_2}, D_{q_2})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \right. \\
 & \quad \left. \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \mid x \right. \\
 & \quad \left. \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \mid y e^{-2i\pi h} \right] \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

बशर्ते कि (1.1) में दिए गए प्रतिबन्धों की तुष्टि हो।

उपपत्ति : (2.1) को सिद्ध करने के लिए हम इसके वाम पक्ष को (1.1) की सहायता से इसके केंद्र समाकल में प्रसारित करते हैं और फल

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Gamma(k+vs+vt) \Gamma(hs+ht)}{\Gamma(k-1+vs+vt)} = (k-1+vs+vt) \Gamma(hs+ht) \\
 &= (k-1) \Gamma(hs+ht) + \frac{v}{h} \Gamma(1+hs+ht), \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

का सदुपयोग करते हैं। तब परिभाषा (1.1) से इसका विवेचन करने पर हमें (2.1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है। इसी प्रकार के तर्कों द्वारा हम परिणाम (2.2)-(2.4) सिद्ध कर सकते हैं। (2.5) को सिद्ध करने के लिए हम (2.1) की उपपत्ति के समान अग्रसर होते हैं और परिणाम

$$\Gamma(k-hs-ht) \Gamma(1-k+hs+ht) = \frac{\pi}{\sin \pi (k-hs-ht)}.$$

का उपयोग करते हैं ।

विशिष्ट दशाणु

$p_2=q_2=0$ रखने तथा यह मानने पर कि मिश्रित संकेत वाले गामा फलन कारकों में कोई वृद्धि नहीं होती, तो हमें श्रीवास्तव का फल^[2] प्राप्त होता है ।

निर्देश

1. प्रसाद, वाई० एन० तथा प्रसाद, एस०, Journal of Scientific Research, B. H. U., 1979, 30(1), 67-76.
2. श्रीवास्तव, एच० एस० पी०, विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1978, 21(4), 315-19.

मध्य भारत के कुछ वनों का ऋतुजैविकी प्रेक्षण

सी० डी० आठया

वनस्पति शास्त्र विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त - अक्टूबर 30, 1981]

सारांश

मध्यप्रदेश के अयनवृत्तीय शुष्क पर्णपाती मिश्रित वनों के 8 स्थानों के 40 वृक्षों की जातियों में ऋतुजैविकी प्रेक्षण किया गया है। लगभग 87% वृक्ष जातियों में पतझड़ दिसम्बर से मार्च के मध्य होता है एवं खुले वनों की अपेक्षा यह सघन वनों में कुछ पहले अंकित किया गया। पर्ण उन्मज्जन अधिकांश जातियों (92%) में मार्च से जून के मध्य देखा गया। पुष्पन एवं फलझड़ भी अधिकांश जातियों (क्रमशः 72% और 52%) में मार्च से जून के मध्य (ग्रीष्म काल) सम्पन्न हुआ। पुष्पन एवं पर्ण उन्मज्जन और फलझड़ एवं पतझड़ घटनायें आपस में सतत्, असतत् या परस्परव्यापी पाई गईं। ऋतुजैविकी प्रेक्षण को प्रभावित करने वाले मुख्य कारण मृदा, स्थलाकृति, वायुवेग एवं वनों की स्थूलता ही माने जाते हैं।

Abstract

Phenological observations in some forests of Central India. By C. D. Athaya, Department of Botany, University of Saugar, Saugar.

Phenological observation of 40 tree species in 8 sites of tropical dry deciduous mixed forests were recorded. Nearly 87% of tree species shedded their old leaves from December to March. An early leaf fall was recorded in open forests with sparse canopy of trees than in thick and dense forests. Emergence of new leaves was recorded from March to June in 92% of species. Majority of species indicated flowering (72%) and fruit-fall (52%) during summer (March-June). Flowering and leafing, and fruit-fall and leaf-fall events were found to be continuous, discontinuous or overlapping. Soil, topography, wind-velocity and thickness of the forests are considered to be main factors influencing phenology.

अध्ययन क्षेत्र

अध्ययन क्षेत्र जिला सागर, कर्क रेखा के उष्णकटिबंध से कुछ किलोमीटर उत्तर में 23° 50' उ० एवं 78° 40' पू०, समुद्री सतह से 583 मीटर औसत ऊँचाई पर भारत के मध्य स्थित है। कुल 2991

वर्ग किलोमीटर क्षेत्र में 8 वनस्थान बांदरी, शाहगढ़, आवचंद, जामघाट, नीमघटिया, राहतगढ़, जरूआ-खेड़ा एवं पथरिया प्रयोगात्मक कार्य हेतु चुने गये।

क्षेत्र की स्थल रूपरेखा उर्मिल एवं विन्ध्य रेत पत्थर तथा बेसाल्ट पहाड़ियों द्वारा निर्मित है जो मृदा के भौतिक एवं रासायनिक गुणों पर अधिक प्रभाव डालती है। पहाड़ियों के आधार काली चिकनी मिट्टी, रेत, क्षार एवं कार्वनिक पदार्थ लिये हुए है जो कि वर्षाकाल में जललम्पन हो जाती है। पहाड़ियों के पठार एवं ढलान पर मिट्टी लेटराइट बनने के कारण लाल रंग लिये होती है क्योंकि यहाँ से रेत, क्षार बह जाते हैं तथा लौह एवं एल्युमिनियम आक्साइड संचित हो जाते हैं। चेम्पियन तथा सेठ^[5] के वर्गीकरण अनुसार इस क्षेत्र के वनों को अयनवृत्तीय शुष्क पर्णपाती मिश्रित वनों की श्रेणी में रखा गया है।

प्रस्तावना

पौधों में पर्ण उन्मज्जन, पुष्पन, पतझड़ एवं फलभङ्ग जैसे मौसमी परिवर्तन को ऋतुजैविकी प्रेक्षण कहते हैं। शेलफोर्ड^[23] ने सर्वप्रथम इस शब्द का उपयोग किया परन्तु डाविनमायर^[6] ने सुधार कर इसे पौधों एवं जलवायु संबंधी कारकों की सामयिक क्रिया होना बताया।

निकटवर्ती पौधों की ऋतुजैविकी मनुष्य का ध्यान अपनी ओर आकर्षित करती है। यह अध्ययन पौधों की विभिन्न जातियों के वनतल के चरित्र, एवं उसमें पड़े हुए पत्तों के उचित प्रतिचयन की योजना बनाने में सहायक होता है।

वैज्ञानिकों ने उष्णकटिबंध वर्षा वन^[2'8'21'22'25], शीतोष्ण^[1'9'12'17] एवं शुष्कपर्णपाती मिश्रित वनों^[3'10'14'15] का गहन अध्ययन करके ऋतुजैविकी प्रेक्षण के सहसंबंध पर कुछ आश्चर्यजनक तथ्य प्रस्तुत किये, जैसे —

- (1) पुष्पन का मौसम जलवायु से सहसंबंध^[4]
- (2) पुष्पन का पर्ण उन्मज्जन से सहसंबंध^[1'4'13'20'24]

परिणाम तथा विवेचनां

(1) पतझड़ :

वनों के मासिक प्रेक्षण के उपरान्त पतझड़ को शीतकालीन एवं ग्रीष्मकालीन, दो मुख्य भागों में बाँटा गया है। शीतकालीन पतझड़ अक्टूबर से प्रारम्भ होकर मार्च तक समाप्त होता है जबकि ग्रीष्मकालीन पतझड़ फरवरी से प्रारम्भ होकर मई तक पूर्ण होता है यद्यपि अधिकांश जातियाँ (87%) अपनी पत्तियाँ शीतकाल में ही त्याग देती हैं।

उष्ण कटिबंध वर्षा वनों में पायी जाने वाली जातियों में पतझड़ पूरे वर्ष भर लगातार चलता है यद्यपि शुष्क महीनों में यह अपेक्षाकृत अधिक हो जाता है। मेज^[8] के अनुसार नाइजीरिया में शुष्क मौसम पतझड़, बाकी वचे महीनों से दसगुना अधिक होता है।

उष्णशीतोष्ण वनों में पतझड़ वर्ष भर की क्रिया है जो कि कभी जनवरी-मार्च ^[11] तो कभी अक्टूबर-नवम्बर ^[9] में अधिकतम होती है।

शीत, उष्ण, शीतोष्ण वनों में पतझड़ असाधारण रूप से होता है तथा दक्षिणी ध्रुव में 4/5 भाग केवल 7 महीनों (जून-दिसम्बर) में पूर्ण होता है।

अध्ययन क्षेत्र के शुष्कपर्णपाती मिश्रित वनों में पतझड़ के दो मुख्य आवर्तकाल, शीत एवं ग्रीष्म हैं। खुले वन एवं पठारीय स्थित पौधों की अपेक्षा सघन एवं पहाड़ीतल के पौधों में पतझड़ कुछ देर से होता है। उसी प्रकार रेतीली चट्टानों की अपेक्षा बेसाल्ट चट्टान पर पाये जाने वाले पौधों में शीघ्र पतझड़ देखा गया है जो मृदा जल एवं अपवाह तन्त्र के कारण होता है।

(2) पर्ण उन्मज्जन :

सारिणी 1 के अनुसार वर्षा (जून-जुलाई) एवं ग्रीष्म (मार्च-जून) ही दो मुख्य पर्ण उन्मज्जन काल माने गये हैं यद्यपि अधिकांश जातियों (92%) में यह ग्रीष्म काल ही में होता है।

दक्षिणी नाइजीरिया के वर्षा वन ^[20], कोस्टारिका के पतझड़ वन ^[7], एवं भारत के कुछ शुष्कपर्णपाती वनों ^[14,15] के गहन अध्ययन के पश्चात् यही निष्कर्ष निकलता है कि इनमें ग्रीष्मकालीन पल्लवन ही प्रमुख है।

(3) पुष्पन :

पर्ण उन्मज्जन की तरह पुष्पन भी वर्षाकालीन (जून-अक्टूबर) एवं ग्रीष्मकालीन (फरवरी-जून) होता है जबकि अधिकांश जातियों (72%) में पुष्पन ग्रीष्मकालीन ही देखा गया है।

वर्षा वन नाइजीरिया ^[16] एवं अर्धपर्णपाती वन कोस्टारिका ^[7,20] के विस्तृत अध्ययन से यह निष्कर्ष निकलता है कि वर्षा वनों में पुष्पन वर्ष भर चलता है यद्यपि ग्रीष्मकाल में इसमें भिन्नता पायी जाती है।

शीतोष्ण वनों में पुष्पन में ऋतु विभिन्नता अधिकांश देखने को नहीं मिलती परन्तु शरत् शीतलता पौधों में अधिकतम पुष्पन करती है।

(4) फलझड़ :

पौधों में फलझड़ का प्रारंभ एवं समापन के औसतकाल (सारिणी 1) के अनुसार शीतकालीन (नवम्बर-मार्च) एवं ग्रीष्मकालीन (मार्च-जून) होता है। अधिकांश जातियों (52%) में फलझड़ पूर्व ग्रीष्मकालीन ही होता है परन्तु तेंदू जैसे वृक्षों में फल शाखाओं पर 8 महीने तक प्रतिधारित रहते हैं।

उपर्युक्त अध्ययन के आधार पर पर्ण उन्मज्जन, पतझड़, पुष्प एवं फलझड़ कार्यों में रोचक सहसंबंध पाया गया।

अ. पर्ण उन्मज्जन एवं पुष्पन :

ये आपस में सतत्, असतत् या परस्परव्यापी होते हैं ।

सतत : कैथ, आंवला, धोबिन, कालासेजा, कारी, बहेड़ा, कौहा, घोंट, कचनार, कालासिरिस, बेल, केम, खैर, अमलतास, तेन्दू, एवं पापरी जैसे वृक्ष में पुष्प, पर्ण उन्मज्जन के साथ ही दिखाई देते हैं तथा इनके बीच अक्षतकाल नहीं होता ।

असतत् : कुलू, सेमल, गरुगा, महुआ, गुंजा, पलास, हड्डसा, एवं कोसम जैसे वृक्षों में पुष्पन पर्ण उन्मज्जन के पूर्व हो जाता है तथा दोनों के मध्य एक अन्तराल होता है ।

परस्परव्यापी : रैभा, कसई, मरोड़फली, भिलवा, बरगा, धवा, अचार, सागौन इत्यादि में पुष्पन पर्ण उन्मज्जन के बाद ही होता है तथा दोनों के मध्य अक्षतकाल कम या अधिक हो सकता है । पुष्पन कार्य 55% जातियों में पर्ण उन्मज्जन के कार्य के साथ, 22% में पहले तथा 23% में बाद में होता है ।

ब. पतझड़ एवं फलभङ्ग :

ये भी पर्ण उन्मज्जन एवं पुष्पन की तरह सतत्, असतत् या परस्परव्यापी होते हैं ।

सतत् : खैर, रैभा, कालासिरिस, धवा, कचनार, कसई, अमलतास, तेन्दू, कैथ, पापरी, मरोड़-फली, बरगा, कालासेजा, बीजासाल, सागौन, कौहा, बहेड़ा, एवं साज वृक्षों में दोनों लगातार होकर निम्नलिखित विशेष गुण दर्शाते हैं :—

1. भूमि की सतह पर फलतह, पर्णतह में अंतर्निहित हो जाये
2. फलभङ्ग पतझड़ के साथ हो
3. बीजांकुरण के समय प्रांकुर एवं मूलांकुर पर्णतह से बाहर न निकल पाये ।

असतत : आंवला, फालसा, एवं घोंट जैसी जातियाँ फलभङ्ग पतझड़ के पूर्व होकर निम्न गुण प्रदर्शित करती हैं

1. फल जमीन पर पर्णतह के नीचे ढके हों
2. बीजांकुर के समय प्रांकुर पर्णतह से ऊपर निकले ।

परस्परव्यापी : बेल, अचार, छेवला, चिरोल, हड्डसा, गुंजा, महुआ, कारी, सेमल, कोसम, भिलवा, कुलू, एवं धोबिन जैसी जातियों में फलझड़ पतझड़ के बाद होकर निम्न लक्षण दर्शाते हैं

सारणी 1. शुष्क पर्णपाती मिश्रित वनों की कुछ जातियों में ऋतुजैविक प्रेक्षण

जातियों के नाम	पर्ण उन्मज्जन	ऋतुजैविकी कार्यकाल (मास)		
		पतझड़	पुष्पन	फलझड़
1. खैर (एकेशिया केटेच्य)	मई-जून	दिसम्बर-मार्च	मई-जुलाई	नवम्बर-मार्च
2. रेंझा (ए. ल्यूकोफिलिया)	अप्रैल-जून	जनवरी-मार्च	जुलाई-सितंबर	फरवरी-अप्रैल
3. बेल (ईगल मारमिलोस)	अप्रैल-मई	दिसम्बर-मार्च	मई-जुलाई	मई-जून
4. कालासिरिस (एलबीजिया लेबेक)	अप्रैल-मई	दिसम्बर-मार्च	अप्रैल-जून	जून-मार्च
5. सफेद सिरिस (ए०प्रोसेरा)	मई-जून	दिसम्बर-अप्रैल	मई-जून	जनवरी-मई
6. धवा (एनोगेस्स लेटीफोलिया)	अप्रैल-जून	दिसम्बर-मार्च	सितम्बर-अक्टूबर	जनवरी-फरवरी
7. कचनार (बोहिनिया-रेसीमोसा)	अप्रैल-जून	दिसम्बर-मार्च	अप्रैल-मई	दिसम्बर-फरवरी
8. कसई (ब्राईडेला रेडूसा)	अप्रैल-मई	दिसम्बर-मार्च	जुलाई-सितम्बर	दिसम्बर-फरवरी
9. अचार (बुकनिया लेन्जन)	मई-जून	मार्च-मई	फरवरी-मार्च	जून-जून
10. पलास (ब्यूटिया-मोनोस्परमा)	अप्रैल-जून	फरवरी-अप्रैल	मार्च-अप्रैल	जून-जून
11. अमलतास (केसिया-फिस्टूला)	मई-जून	दिसम्बर-मार्च	मई-जुलाई	जनवरी-मार्च
12. घोबिन (डलबरनिया पेनीकुलेटा)	अप्रैल-जून	दिसम्बर-मार्च	अप्रैल-मई	जुलाई-अगस्त
13. तेंदू (डायोस्परोस-मेलेनोजायलीन)	मई-जून	मार्च-मई	मई-जून	अप्रैल-मई
14. आंवला (एम्बलिका-आफीसिनेलिस)	मार्च-मई	नवम्बर-फरवरी	मार्च-मई	अक्टूबर-दिसंबर
15. केथा (फेरोनिया ऐली फेन्टिस)	मार्च-मई	नवम्बर-फरवरी	मार्च-अप्रैल	दिसम्बर-मार्च

AP 8

16. कांकेर (फलेकारसिया-इन्डिका)	मार्च-मई	नवम्बर-फरवरी	मार्च-अप्रैल	जून-जून
17. पापरा (गरडीनिया-लेटीफोलिया)	मई-जून	फरवरी-अप्रैल	जून-जुलाई	मार्च-जून
18. गरूगा (गरूगा पिन्नेटा)	अप्रैल-जून	अक्टूबर-दिसम्बर	फरवरी-मार्च	मई-जून
19. धामन (ग्रीविया-टीलिफोलिया)	अप्रैल-जून	नवम्बर-मार्च	मई-जुलाई	अक्टूबर-दिसम्बर
20. मरोड़फली (हेलिम्ट्रल आईमोरा)	अप्रैल-जून	दिसम्बर-मार्च	जुलाई-सितम्बर	अक्टूबर-जनवरी
21. चिरोल (हिलेप्टिलिया इन्ट्रे ग्रीफोलिया)	मार्च-मई	दिसम्बर-फरवरी	फरवरी-फरवरी	अप्रैल-मई
22. हरूआ (हाइमेनोडिक्टियोन एम्सेल्सा)	मई-जून	दिसम्बर-मार्च	मार्च-अप्रैल	जून-जून
23. बरगा (काडिया केलीसिता)	अप्रैल-जून	दिसम्बर-मार्च	सितम्बर-अक्टूबर	फरवरी-मार्च
24. कालासंजा (लेगरस्टोमिया पारवीफलोरा)	अप्रैल-जून	दिसम्बर-मार्च	अप्रैल-मई	नवम्बर-जून
25. गुन्जा (लेलिया कोरो-मेन्डेलिका)	मई-जून	अक्टूबर-दिसम्बर	फरवरी-मार्च	मई-जून
26. महुआ (मधुका इन्डिका)	अप्रैल-जून	जनवरी-अप्रैल	फरवरी-मार्च	जुलाई-अगस्त
27. कारी (मिलिओसा टामनटोसा)	अप्रैल-जून	दिसम्बर-मार्च	अप्रैल-मई	जुलाई-जुलाई
28. केम (मिट्रागाईना पारवीफोलिया)	अप्रैल-जून	दिसम्बर-मार्च	मई-जुलाई	जनवरी-मई
29. सन्दन (यूजिनिया ऊजेनेन्सिस)	अप्रैल-जून	दिसम्बर-मार्च	अप्रैल-मई	जुलाई-जुलाई
30. बीजासाल (टेरोकारपस मारसूपियम)	अप्रैल-जून	दिसम्बर-मार्च	सितम्बर-अक्टूबर	जनवरी-मार्च
31. सेमल (सालमेलिया मेलावेरीका)	मई-जून	अक्टूबर-जनवरी	जनवरी-मार्च	मई-मई

32. कोसम (स्लाइचेरा ओलियोसा)	अप्रैल-जून	दिसम्बर-मार्च	अप्रैल-मई	जुलाई-जुलाई
33. भिलवां (संमीकारपस एनाकारडियम)	अप्रैल-जून	फरवरी-मार्च	जुलाई-सितंबर	मार्च-अप्रैल
34. बनिया कांकेर (स्त्रेवेरा स्वीटीनार्डस)	मई-जून	दिसम्बर-अप्रैल	मई-जून	जनवरी-अप्रैल
35. कुलू (स्टरकुलिया यूरेन्स)	जून-जुलाई	अक्टूबर-दिसम्बर	दिसम्बर-फरवरी	अप्रैल-मई
36. सागोन (टेक्टोना ग्रेन्डिस)	जून-अगस्त	दिसम्बर-मार्च	जुलाई-दिसम्बर	जनवरी-अप्रैल
37. कोहा (टरमिनेलिया अर्जुन)	अप्रैल-जून	दिसम्बर-मार्च	मई-जुलाई	जनवरी-जून
38. बहेड़ा (टोवेलेरिका)	अप्रैल-जून	दिसम्बर-मार्च	अप्रैल-मई	दिसम्बर-अप्रैल
39. साज (टोटासनटोसा)	जून-अगस्त	दिसम्बर-अप्रैल	जून-अगस्त	दिसम्बर-अप्रैल
40. घोट (जिजिपस जायलो-पारा)	अप्रैल-जून	दिसम्बर-मार्च	अप्रैल-मई	अक्टूबर-दिसम्बर

*वानस्पति नाम कोष्ठक में दिये गये हैं ।

1. फल, पर्णतल के ऊपर हों
2. मूलांकुर को पर्णतल से ऊपर निकलने के लिये संघर्ष करना पड़े ।

उपर्युक्त प्रेक्षणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि 52% जातियों में फलझड़, पतझड़ के साथ, 40% में पतझड़ के बाद तथा 7% में पतझड़ के पहले होता है ।

कई वैज्ञानिकों [1,3,13,14,20,21] ने वर्षा वन, शीतोष्ण वन, एल्पाइन वन तथा शुष्कपर्णपाती मिश्रित वनों की बहुत सी जातियों का ऋतुजैविकी प्रेक्षण करके पतझड़, पर्ण उन्मज्जन, पुष्पन एवं फलझड़ में परस्परिक सहसंबंध की विवेचना की ।

(5) ऋतुजैविकी कार्यों पर प्रभाव डालने वाले कारक :

वैज्ञानिकों का इस प्रकार का अध्ययन केवल कृषि-फसलों तक ही सीमित रहा है । जहाँ तक वन वृक्षों का ऋतुजैविकी अनुक्रिया का प्रश्न है वह हर वर्ष मौसम, जलवायु के अनुसार बदलती रहती है । कृष्ण स्वामी एवं मथुडा^[5] के अनुसार पौधों में ऋतुजैविकी कार्यों का भारी हेर-फेर यह दर्शाता है कि उनका ऋतुजैविकी स्वभाव एक से अधिक आंतरिक या बाह्य कारकों द्वारा संचालित होता है । आंतरिक कारक पौध जातियों में विकास एवं ऋतुजैविकी स्वाभाव के सांचे के लिये तथा बाह्य कारक उनके आंत-

रिक कारकों की हेरफेर एवं बदलने के लिये जिम्मेदार होते हैं। अध्ययन किये गये मुख्य कारक आद्रता, वर्षा, तुषार, ताप, मृदाजल, तापकाल एवं वेग, सूक्ष्म जलवायु एवं मौसम हैं।

पौधों में ऋतुजैविकी कार्यों का अध्ययन वनों की कई अवस्थितियों तथा वन्य प्राणियों के खान-पान के स्वाभाव को जानने में सहायक होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक विश्वविद्यालय आयोग, नई दिल्ली, प्रोफेसर जी० पी० मिश्रा, विभागाध्यक्ष, वनस्पति विभाग सागर विश्वविद्यालय तथा वन विभाग, सागर के अधिकारियों का आभारी है जिन्होंने क्रमशः वित्तीय, प्रयोगात्मक एवं अध्ययन क्षेत्र संबंधी सहायता पहुँचाई।

निर्देश

1. एल्विन, सी० ई०, इकोलाजी, 1957, 38, 622-628.
2. बियर्ड, जे० एस०, जर्न० इको०, 1946, 33, 173-192.
3. भटनागर, एस०, पी०-एच० डी० थीसिस, सागर विश्वविद्यालय, 1968.
4. ब्लेटर, ई०, जर्न० बाम्बे नेच० हिस्ट्री सोसा०, 1907, 17, 334.
5. चेम्पियन, एच० जी० तथा सेठ, एस०के०, भारत शासन प्रकाशन मासिक, 1968.
6. डाविनमायर, आर०, विली ई० प्राइ०लिमि० न्यूयार्क, 1947.
7. वही, जर्न०इको०, 1972, 60, 147-170.
8. डेविस, टी० ए०डब्ल्यू० तथा रिचर्ड, पी० डब्ल्यू, जर्न० इको०, 1933, 21, 350-384.
9. गिल, जे० एम०, केने० डिपा० नार्थ० एफे० नेच० रिसो०, 1955.
10. गुप्ता, आर० के०, वही, 1960.
11. हेच, ए० बी०, लीफ० फार० व० केनबरा 1955, 70, 18
12. होल्टम, आर० ई०, गार्डन बुल० स्ट्रे० सेट 1931, 5, 173-206.
13. होल्वे, जे० जी० तथा वार्ड, आर० टी०, इकोलाजी, 1965, 46 73-83.
14. जोसेफ, आर० एन०, पी०-एच० डी० थीसिस, सागर विश्वविद्यालय, 1977.
15. कृष्ण स्वामी, बी०एस० तथा मथुडा, जी०एस०, इंडियन फारे०, 1954, 80, 124-153.
16. लिली, एस० यू०, ट्री नार्थ० लन्दन, 1925.
17. लीविन, टी० के०, रूहा० फारे०, 1951, 5, 33.

18. मेज, डी० एस०, पीडोबायोलाजिका, 1965, 5, 273-288.
19. मिलर, आर० बी० तथा हरसट, एफ० बी०, ना०जो० फारे०रिस० नोट, 1957, 8, 14.
20. जोकू, ई०, जर० इको०, 1963, 51, 617-524.
21. सेफलर, जी०, नोट० बा० गार० बर०, 1901, 3, 139-166.
22. सिम्फर, ए० एफ० डब्ल्यू०, बेलफोरआक्सफोर्ड, 1930.
23. शेल्फोर्ड, बी० ई०, विलियन्स एन्ड विलकिन्स, 1929.
24. वोल्कन्स, जी०, इन्डेन ट्राप० बर्लिन, 1912.
25. राइट, एस०, एन० बोट० गार्ड० पेरेडिनिया 1905, 2, 415-517.



तीन चरों वाले अत्यन्त सार्वीकृत फाक्स H -फलन (I)

प्रमिला बापना तथा ए०एन० गोयल

गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—जून 15, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र तीन चरों वाले अत्यन्त सार्वीकृत फाक्स H -फलन के सम्बन्ध में है। यह फलन $H^*(x, y, z)$ है और इसमें मेलिन-वार्नीज कंटूर समाकलों के द्वारा प्रदर्शित प्रायः सभी फलन आ जाते हैं।

Abstract

On a most generalised Fox H -function of three variables (I). By Pramila Bapna and A. N. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

The present paper gives the most generalised Fox H -functions of three variables. This function, viz., $H^*(x, y, z)$ contains almost all functions representable by Mellin-Barnes contour integrals of one, two, three variables as particular cases.

1. प्रस्तावना

हम तीन चरों वाले सार्वीकृत फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

$$H^* \left[\begin{array}{c} [m, 0] \\ [p, q] \\ \left\{ \left[\begin{array}{c} M_k, 0 \\ P_k, Q_k \end{array} \right] \right\}_{k=1, 2, 3} \\ \left(\left(\begin{array}{c} m_k, n_k \\ p_k, q_k \end{array} \right) \right)_{k=1, 2, 3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} [(a_p; a_p^{l_1}, a_p^{l_2}, a_p^{l_3}); (b_q; \beta_q^{l_1}, \beta_q^{l_2}, \beta_q^{l_3})] \\ \{ (e_{P_k}^k; \lambda_{P_k}^k, \lambda_{P_k}'^k); (f_{Q_k}^k; \mu_{Q_k}^k, \mu_{Q_k}'^k) \} \\ (c_{p_k}^k; \gamma_{p_k}^k); (d_{q_k}^k; \delta_{q_k}^k) \end{array} \right] \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{L_1} \int_{L_2} \int_{L_3} \psi \left(\sum_{k=1}^3 S_k \right) \psi(S_1 + S_2, S_1 + S_3, S_2 + S_3) \prod_{k=1}^3 \phi(S_k) x^{s_1} y^{s_2} z^{s_3} ds_1 ds_2 ds_3 \quad (1.0)$$

$$\text{जहाँ } \psi \left(\sum_{k=1}^3 S_k \right) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma \left(a_j + \sum_{k=1}^3 a_j^k S_k \right)}{\prod_{j=1+m}^p \Gamma \left(1 - a_j - \sum_{k=1}^3 a_j^k S_k \right) \prod_{j=1}^q \Gamma \left(b_j + \sum_{k=1}^3 \beta_j^k S_k \right)} \quad (1.1)$$

$$\phi(S_k) = \frac{\prod_{j=1}^{mk} \Gamma \left(1 - c_j^k + \gamma_j^k S_k \right) \prod_{j=1}^{nk} \Gamma \left(d_j^k - \delta_j^k S_k \right)}{\prod_{j=1+m_k}^{pk} \Gamma \left(c_j^k - \gamma_j^k S_k \right) \prod_{j=1+n_k}^{qk} \Gamma \left(1 - d_j^k + \delta_j^k S_k \right)} \quad (1.2)$$

$$\psi(S_1 + S_2, S_1 + S_3, S_2 + S_3)$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{M_1} \Gamma \left(e_j^1 + \lambda_j^1 S_1 + \lambda_j^{'1} S_2 \right) \prod_{j=1}^{M_2} \Gamma \left(e_j^2 + \lambda_j^2 S_1 + \lambda_j^{'2} S_3 \right)}{\prod_{j=1+M_1}^{P_1} \Gamma \left(1 - e_j^1 - \lambda_j^1 S_1 - \lambda_j^{'1} S_2 \right) \prod_{j=1}^{Q_1} \Gamma \left(f_j^1 + \mu_j^1 S_1 + \mu_j^{'1} S_2 \right)} \\ \times \frac{\prod_{j=1}^{M_3} \Gamma \left(e_j^3 + \lambda_j^3 S_2 + \lambda_j^{'3} S_3 \right)}{\prod_{j=1+M_2}^{P_2} \Gamma \left(1 - e_j^2 - \lambda_j^2 S_1 - \lambda_j^{'2} S_3 \right) \prod_{j=1}^{Q_2} \Gamma \left(f_j^2 + \mu_j^2 S_1 + \mu_j^{'2} S_3 \right)} \times \\ \times \frac{\prod_{j=1+M_3}^{P_3} \Gamma \left(1 - e_j^3 - \lambda_j^3 S_2 - \lambda_j^{'3} S_3 \right) \prod_{j=1}^{Q_3} \Gamma \left(f_j^3 + \mu_j^3 S_2 + \mu_j^{'3} S_3 \right)}{\prod_{j=1}^{Q_3} \Gamma \left(f_j^3 + \mu_j^3 S_2 + \mu_j^{'3} S_3 \right)} \quad (1.3)$$

घन पूर्णाङ्कों $m, m_k, M_k, n_k, p, q, p_k, q_k, P_k, Q_k, (k=1, 2, 3)$ से निम्नलिखित असमिकाओं की तुष्टि होती है

$$0 \leq m \leq p; 0 \leq m_k \leq p_k; 0 \leq M_k \leq P_k; 0 \leq n_k \leq q_k; q \geq 0, q_k \geq 1, Q_k \geq 1 \quad (1.4)$$

इसमें से $x, y, z=0$ मान नहीं सम्मिलित है। कंटूर $L_k (k=1, 2, 3)$ S_k तल में है और $-i\infty$ से $+i\infty$ तक अपने लूपों सहित विस्तीर्ण है जिससे आवश्यक रहा जा सके कि

$$\Gamma(d_j^k - \delta_j^k S_k); j=1, 2, \dots, n_k$$

के पोल कंटूर के दाहिनी ओर तथा

$$\Gamma(1 - c_j^k + \gamma_j^k S_k); j=1, 2, \dots, m_k,$$

$$\Gamma\left(a_j + \sum_{k=1}^3 \alpha_j^k S_k\right); j=1, \dots, m \text{ एवं } \Gamma(e_j^1 + \lambda_j^1 S_1 + \lambda_j^{11} S_2), j=1, 2, \dots, M_1;$$

$$\Gamma(e_j^2 + \lambda_j^2 S_1 + \lambda_j^{22} S_3), j=1, 2, \dots, M_2; \Gamma(e_j^3 + \lambda_j^3 S_2 + \lambda_j^{33} S_3), j=1, 2, \dots, M_3.$$

के पोल कंटूर के बाईं ओर पड़ते हैं।

अब मैकराबर्ट के E फलन के अभिसरण के लिए जिस प्रकार अग्रसर हुआ जाता है या फिर जैन तथा गोयल^[5] द्वारा परिभाषित $H(x, y, z)$ के समान आगे बढ़ते हुए हम अभिसरण के निम्नलिखित प्रतिबन्ध प्राप्त करते हैं। यह स्मरण रखना होगा कि समस्त α', β', γ' इत्यादि भी सम्मिश्र हैं।

प्रतिबन्ध

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & |\arg X_k| = |\phi_k| < \left(W'_5 + \frac{W'_1}{2} - \frac{W'_2}{2} \right) \pi; \text{ तथा } 2W'_5 + W'_1 > W'_2 \quad (1.5) \\ \text{(ii)} \quad & W'_3 + W'_6 > W'_4 + W'_1 \quad (1.6) \\ \text{(iii)} \quad & W'_1 > W'_2 \quad (1.7) \end{aligned} \right\} A$$

जहाँ $[K=1, 2, 3]$ बड़े अक्षरों में लिखे P_k तथा Q_k को छोड़कर जहाँ $K =$ केवल 1 तथा 2]

$$W'_1 = \sum_{j=1}^p (\alpha_j^k)' + \sum_{j=1}^{p_k} (\gamma_j^k)' + \sum_{j=1}^{P_k} (\lambda_j^k)',$$

$$W'_2 = \sum_{j=1}^q (\beta_j^k)' + \sum_{j=1}^{q_k} (\delta_j^k)' + \sum_{j=1}^{Q_k} (\mu_j^k)',$$

$$W'_3 = \sum_{j=1}^p (\alpha_j^k)' \log |\alpha_j^k| + \sum_{j=1}^{p_k} (\gamma_j^k)' \log |\gamma_j^k| + \sum_{j=1}^{P_k} (\lambda_j^k)' \log |\lambda_j^k|$$

AP 9

$$W'_4 = \sum_{j=1}^q (\beta_j^{t,k})' \log |\beta_j^{t,k}| + \sum_{j=1}^{qk} (\delta_j^k)' \log |\delta_j^k| + \sum_{j=1}^{Qk} (\mu_j^k)' \log (\mu_j^k)$$

$$W'_5 = \sum_{j=1}^{nk} |(\delta_j^k)'| - \sum_{j=1+m}^b |(\alpha_j^{t,k})'| - \sum_{j=1+m_k}^{Pk} |(\gamma_j^k)'| - \sum_{j=1+M_k}^{Pk} |(\lambda_j^k)'|$$

$$W'_6 = \sum_{j=1}^b (\alpha_j^{t,k})' \psi_j^k + \sum_{j=1}^{Pk} (\gamma_j^k)' A_j^k + \sum_{j=1}^{Pk} (\lambda_j^k)' R_j^k$$

$$W'_7 = \sum_{j=1}^q (\beta_j^{t,k})' F_j^k + \sum_{j=1}^{qk} (\delta_j^k)' P_j^k + \sum_{j=1}^{Qk} (\mu_j^k)' T_j^k$$

$$\psi_j^k = \text{amp } \alpha_j^{t,k}, A_j^k = \text{amp } \gamma_j^k, P_j^k = \text{amp } \delta_j^k, F_j^k = \text{amp } \beta_j^{t,k}$$

$$R_j^k = \text{amp } \lambda_j^k, T_j^k = \text{amp } \mu_j^k.$$

$$W''_1, W''_2, W''_3, \dots, W''_7$$

एक डैश के स्थान पर दो डैश लगाकर प्राप्त किये जाते हैं ।

$$\alpha_j^{t,k} = (\alpha_j^{t,k})' + i (\alpha_j^{t,k})'', \text{ इसी प्रकार } \beta_j^{t,k} = (\beta_j^{t,k})' + i (\beta_j^{t,k})'' \text{ तथा आगे भी ।}$$

गुण : हम इसके बाद या सर्वत्र (1.0) के वाम पक्ष को, यदि अन्दर के प्राचल उसी प्रकार से हों, तो $H^*(x, y, z)$ के रूप में लिखेंगे ।

अब हम कुछ गुणों का वर्णन उनकी उपपत्ति दिये बिना करेंगे क्योंकि उपपत्तियाँ लम्बे परिगणन के रूप में होते हुए भी सीधी हैं ।

$$1. H^*(X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1})$$

$$= H^* \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0 \ m \\ p \ q \end{array} \right] \\ \left\{ \left[\begin{array}{cc} 0 & M_k \\ Q_k & P_k \end{array} \right] \right\}_{k=1, 2, 3} \\ \left(\begin{array}{c} ((n_k, m_k)) \\ ((q_k, p_k)) \end{array} \right)_{k=1, 2, 3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \left[(1-b_q; \beta_q^{t_1}, \beta_q^{t_2}, \beta_q^{t_3}); (1-a_p; \alpha_p^{t_1}, \alpha_p^{t_2}, \alpha_p^{t_3}) \right] \\ \left\{ (1-f_{Q_k}^k; \mu_{Q_k}^k, \mu_{Q_k}^k); (1-e_{P_k}^k; \lambda_{P_k}^k, \lambda_{P_k}^k) \right\} \\ \left((1-d_{q_k}^k; \delta_{q_k}^k); (1-c_{p_k}^k; \gamma_{p_k}^k) \right) \end{array} \middle| \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \right]$$

2. $H^*(X, Y, Z)$

$$= C^3 H^* \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} m, 0 \\ p, q \end{array} \right] \\ \left\{ \left[\begin{array}{c} M_k, 0 \\ P_k, Q_k \end{array} \right] \right\}_{k=1, 2, 3} \\ \left(\left(\begin{array}{c} (m_k, n_k) \\ (p_k, q_k) \end{array} \right) \right)_{k=1, 2, 3} \end{array} \left| \begin{array}{c} \left[(a_p; c\alpha_p^{t_1}, c\alpha_p^{t_2}, c\alpha_p^{t_3}; (b_p; c\beta_q^{t_1}, c\beta_q^{t_2}, c\beta_q^{t_3}) \right] \\ \left\{ (e_{p_k}^k; c\lambda_{p_k}^k, c\lambda_{p_k}^{*k}); (f_{q_k}^k; c\mu_{q_k}^k, c\mu_{q_k}^{*k}) \right\} \\ ((c_{p_k}^k; c\gamma_{p_k}^k); (d_{q_k}^k; c\delta_{q_k}^k)) \end{array} \right. \left. \begin{array}{c} X^C \\ Y^C \\ Z^C \end{array} \right]$$

3. $H^*(X, Y, Z)$

$$= 2^{1/2(1-N)} A N^B \times$$

$$H^* \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} N_m, 0 \\ N_p, N_q \end{array} \right] \\ \left\{ \left[\begin{array}{c} NM_k, 0 \\ NP_k, NQ_k \end{array} \right] \right\}_{k=1, 2, 3} \\ \left(\left(\begin{array}{c} (NM_k, Nn_k) \\ (NP_k, Nq_k) \end{array} \right) \right)_{k=1, 2, 3} \end{array} \left| \begin{array}{c} \left[\left(\Delta(N, a_p); \frac{\alpha_p^{t_1}}{N}, \frac{\alpha_p^{t_2}}{N}, \frac{\alpha_p^{t_3}}{N} \right); \left(\Delta(N, b_q); \frac{\beta_q^{t_1}}{N}, \frac{\beta_q^{t_2}}{N}, \frac{\beta_q^{t_3}}{N} \right) \right] \\ \left\{ \left(\Delta(N, e_{p_k}^k); \frac{\lambda_{p_k}^k}{N}, \frac{\lambda_{p_k}^{*k}}{N} \right); \left(\Delta(N, f_{q_k}^k); \frac{\mu_{q_k}^k}{N}, \frac{\mu_{q_k}^{*k}}{N} \right) \right\} \\ \left(\left(\Delta(N, c_{p_k}^k); \frac{\gamma_{p_k}^k}{N} \right); \left(\Delta(N, d_{q_k}^k); \frac{\delta_{q_k}^k}{N} \right) \right) \end{array} \right. \left. \begin{array}{c} xN^{-C} \\ yN^{-D} \\ zN^{-E} \end{array} \right]$$

$$\text{जहाँ } A = 2m - p - q + 2\sum m_k + 2\sum M_k + 2\sum n_k - \sum p_k - \sum P_k - \sum q_k - \sum Q_k$$

$$B = \sum_{j=1}^p a_j - \sum_{j=1}^q b_j + q/2 - p/2 + \sum_{k=1}^3 \left[\sum_{j=1}^{q_k} d_j^k \right] - \sum_{k=1}^3 \left[\sum_{j=1}^{P_k} c_j^k \right] + \sum p_k/2 - \sum q_k/2$$

$$+ \sum_{k=1}^3 \left[\sum_{j=1}^{P_k} e_j^k \right] - \sum_{k=1}^3 \left[\sum_{j=1}^{Q_k} f_j^k \right] + \sum_{k=1}^3 Q_k/2 - \sum_{k=1}^3 P_k/2$$

$$C = \sum_{j=1}^q \beta_j^{t_1} - \sum_{j=1}^p \alpha_j^{t_1} - \sum_{j=1}^{P_1} \gamma_j^1 + \sum_{j=1}^{q_1} \delta_j^1 - \sum_{j=1}^{P_2} \lambda_j^2 - \sum_{j=1}^{P_3} \lambda_j^2$$

$$D = \sum_{j=1}^q \beta_j^{t_2} - \sum_{j=1}^p \alpha_j^{t_2} - \sum_{j=1}^{P_2} \gamma_j^2 + \sum_{j=1}^{q_2} \delta_j^2 - \sum_{j=1}^{P_3} \lambda_j^3 + \sum_{j=1}^{Q_1} \lambda_j^{*1}$$

$$E = \sum_{j=1}^6 \beta_j^{t_3} - \sum a_j^{t_3} - \sum \gamma_j^{t_3} + \sum \delta_j^{t_3} + \sum \lambda_j^{t_2} + \sum \lambda_j^{t_3}$$

$$\Delta(N, a_p) = \frac{a_p}{N}, \frac{a_p+1}{N}, \dots, \frac{a_p+N-1}{N}$$

विभिन्न समाकल रूपान्तरों के अन्तर्गत सार्विकृत H-फलन के बिम्ब

यदि प्रतिबन्ध A तुष्ट हो तथा $\sigma_k > 0, R(s_k) > 0$

$$R\left(l_k + 3/2 \pm v_k + \sigma_k \min \frac{d_{hk}^k}{\delta_{hk}}\right) > 0, \text{ जहाँ } h_k = 1, 2, \dots, n_k; k = 1, 2, 3$$

तो $K\{x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3} H^*(z_1 x^{\sigma_1}, z_2 y^{\sigma_2}, z_3 z^{\sigma_3}); v_1, v_2, v_3; s_1, s_2, s_3\}$

$$= \frac{2^{l_1+l_2+l_3}}{\pi^{3/2} s_1^{l_1} s_2^{l_2} s_3^{l_3}} \times$$

$$H^* \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} m, 0 \\ p, q \end{array} \right] \\ \left\{ \left[\begin{array}{c} M_k, 0 \\ P_k, Q_k \end{array} \right] \right\}_{k=1, 2, 3} \\ \left(\begin{array}{c} ((m_k+2, n_k)) \\ ((p_k+2, q_k)) \end{array} \right)_{k=1, 2, 3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \left[(a_p; a_p^{t_1}, a_p^{t_2}, a_p^{t_3}); (b_q; \beta_q^{t_1}, \beta_q^{t_2}, \beta_q^{t_3}) \right] \\ \left\{ (e_{p_k}^k; \lambda_{p_k}^k, \lambda_{p_k}^k); (f_{q_k}^k; \mu_{q_k}^k, \mu_{q_k}^k) \right\} \\ \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{l_k}{2} \pm \frac{v_k}{2}; \frac{\sigma_k}{2} \right), (c_{p_k}^k; \gamma_{p_k}^k); (d_{q_k}^k; \delta_{q_k}^k) \right) \end{array} \right] \begin{array}{c} Z_1(2/s_1)^{\sigma_1} \\ Z_2(2/s_2)^{\sigma_2} \\ Z_3(2/s_3)^{\sigma_3} \end{array}$$

2. $K\{x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3} H^*(z_1 x^{-\sigma_1}, z_2 y^{-\sigma_2}, z_3 z^{-\sigma_3}); v_1, v_2, v_3; s_1, s_2, s_3\}$

$$= \frac{2^{l_1+l_2+l_3}}{\pi^{3/2} s_1^{l_1} s_2^{l_2} s_3^{l_3}} \times$$

$$H^* \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} m, 0 \\ p, q \end{array} \right] \\ \left\{ \left[\begin{array}{c} M_k, 0 \\ P_k, Q_k \end{array} \right] \right\}_{k=1, 2, 3} \\ \left(\begin{array}{c} ((m_k, n_k+2)) \\ ((p_k, q_k+2)) \end{array} \right)_{k=1, 2, 3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \left[(a_p; a_p^{t_1}, a_p^{t_2}, a_p^{t_3}); (b_q; \beta_q^{t_1}, \beta_q^{t_2}, \beta_q^{t_3}) \right] \\ \left\{ (e_{p_k}^k; \lambda_{p_k}^k, \lambda_{p_k}^k); (f_{q_k}^k; \mu_{q_k}^k, \mu_{q_k}^k) \right\} \\ \left(\left(\frac{l_k}{2} + \frac{3}{4} \pm \frac{v_k}{2}; \frac{\sigma_k}{2} \right), (d_{q_k}^k; \delta_{q_k}^k) \right) \end{array} \right] \begin{array}{c} Z_1(s_1/2)^{\sigma_1} \\ Z_2(s_2/2)^{\sigma_2} \\ Z_3(s_3/2)^{\sigma_3} \end{array}$$

3. यदि प्रतिबन्ध A तुष्ट हो तथा $\sigma_k > 0, R(s_k) > 0$

$$R\left(l_k - n_k \pm r_k + \sigma_k \min \frac{dh_k}{\delta h_k}\right) > 0, \text{ जहाँ } h_k = 1, 2, \dots, n_k; k = 1, 2, 3.$$

तो $W\{x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3} H^*(z_1 x^{\sigma_1}, z_2 y^{\sigma_2}, z_3 z^{\sigma_3}); \eta_1 + \frac{1}{2}, \eta_2 + \frac{1}{2}, \eta_3 + \frac{1}{2}, (K_1 + \frac{1}{2}, r_1)$
 $(K_2 + \frac{1}{2}, r_2), (K_3 + \frac{1}{2}, r_3); s_1, s_2, s_3\}$

$$= s_1^{-l_1} s_2^{-l_2} s_3^{-l_3} \times$$

$$H^* \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} m, 0 \\ p, q \end{array} \right] \\ \left\{ \left[\begin{array}{c} M_k, 0 \\ P_k, Q_k \end{array} \right] \right\}_{k=1, 2, 3} \\ \left(\left((m_{k+2}, n_k) \right) \right. \\ \left. \left((p_k + 2, q_k + 1) \right) \right)_{k=1, 2, 3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \left[(a_p, \alpha_p^{t_1}, \alpha_p^{t_2}, \alpha_p^{t_3}); (b_q, \beta_q^{t_1}, \beta_q^{t_2}, \beta_q^{t_3}) \right] \\ \left\{ (e_{p_k}^k, \lambda_{p_k}^k, \lambda_{p_k}^k); (f_{q_k}^k, \mu_{q_k}^k, \mu_{q_k}^k) \right\} \\ ((\eta_k + l_k \pm r_k; \sigma_k), (c_{p_k}^k, \gamma_{p_k}^k); (d_{q_k}^k, \delta_{q_k}^k), \\ (k_k + \eta_k - l_k, \alpha_k)) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} Z_1 s_1^{-\sigma_1} \\ Z_2 s_2^{-\sigma_2} \\ Z_3 s_3^{-\sigma_3} \end{array} \right]$$

4. यदि प्रतिबन्ध A तुष्ट हो तथा $\sigma_k > 0, R(s_k) > 0$

$$R\left(l_k \pm r_k - K_k + \sigma_k \min \frac{dh_k}{\delta h_k}\right) > 0 \text{ जहाँ } h_k = 1, 2, \dots, n_k; k = 1, 2, 3.$$

तो $M\{x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3} H^*(z_1 x^{\sigma_1}, z_2 y^{\sigma_2}, z_3 z^{\sigma_3}); (k_1 + \frac{1}{2}, r_1), (k_2 + \frac{1}{2}, r_2), (k_3 + \frac{1}{2}, r_3);$
 $s_1, s_2, s_3\}$

$$= s_1^{-l_1} s_2^{-l_2} s_3^{-l_3} \times$$

$$H^* \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} m, 0 \\ p, q \end{array} \right] \\ \left\{ \left[\begin{array}{c} M_k, 0 \\ P_k, Q_k \end{array} \right] \right\}_{k=1, 2, 3} \\ \left(\left((m_{k+2}, n_k) \right) \right. \\ \left. \left((p_k + 2, q_k + 1) \right) \right)_{k=1, 2, 3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \left[(a_p, \alpha_p^{t_1}, \alpha_p^{t_2}, \alpha_p^{t_3}); (b_q, \beta_q^{t_1}, \beta_q^{t_2}, \beta_q^{t_3}) \right] \\ \left\{ (e_{p_k}^k, \lambda_{p_k}^k, \lambda_{p_k}^k); (f_{q_k}^k, \mu_{q_k}^k, \mu_{q_k}^k) \right\} \\ ((n_k - l_k \pm r_k; \sigma_k), (c_{p_k}^k, \gamma_{p_k}^k); (d_{q_k}^k, \delta_{q_k}^k), \\ 2k_{kn} - l_k; \sigma_k)) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} Z_1 s_1^{-\sigma_1} \\ Z_2 s_2^{-\sigma_2} \\ Z_3 s_3^{-\sigma_3} \end{array} \right]$$

5. यदि प्रतिबन्ध A तुष्ट हो तथा $\sigma_k > 0, R(s_k) > 0$

$$R\left(l_k + \gamma_k + 1 + \sigma_k \min \frac{dh_k}{\delta h_k}\right) > 0, \text{ जहाँ } h_k = 1, 2, \dots, n_k; k = 1, 2, 3.$$

तो $V\{x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3} H^*(z_1 x^{\sigma_1}, z_2 y^{\sigma_2}, z_3 z^{\sigma_3}); (k_1, r_2), (k_2, r_2), (k_3, r_3); s_1, s_2, s_3\}$

$$= s_1^{-l_1} s_2^{-l_2} s_3^{-l_3} \times$$

$$H^* \left[\begin{array}{l} [m, 0] \\ [p, q] \\ \left\{ \left[\begin{array}{l} M_k, 0 \\ P_k, Q_k \end{array} \right] \right\}_{k=1, 2, 3} \\ \left(\begin{array}{l} (m_k+2, n_k) \\ (p_k+2, q_k+1) \end{array} \right)_{k=1, 2, 3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} (a_p; a_p^{t_1}, a_p^{t_2}, a_p^{t_3}); (b_q; \beta_q^{t_1}, \beta_q^{t_2}, \beta_q^{t_3}) \\ \{ (e_{P_k}^k; \lambda_{P_k}^k, \lambda_{P_k}^{k'}) ; (f_{Q_k}^k; \mu_{Q_k}^k, \mu_{Q_k}^{k'}) \} \\ ((-l_k; \sigma_k), (-l_k-2r_k; \sigma_k); (c_{P_k}^k; \gamma_{P_k}^k); \\ (d_{Q_k}^k; \delta_{Q_k}^k), (k_k-l_k-r_k-\frac{1}{2}; \sigma_k)) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} Z_1 s_1^{-\sigma_1} \\ Z_2 s_2^{-\sigma_2} \\ Z_3 s_3^{-\sigma_3} \end{array} \right]$$

6. यदि प्रतिबन्ध A तुष्ट हो, $\sigma_k > 0, R(S_k) > 0,$

$$R(l_k+1+\sigma_k \min \frac{d_{hk}}{\delta_{hk}}) > 0, \text{ जहाँ } h_k=1, 2, \dots, n_k; k=1, 2, 3.$$

तो $L\{x^{l_1} y^{l_2} z^{l_3} H^*(z_1 x^{\sigma_1}, z_2 y^{\sigma_2}, z_3 z^{\sigma_3}); s_1, s_2, s_3\}$

$$= s_1^{-l_1} s_2^{-l_2} s_3^{-l_3} \times$$

$$H^* \left[\begin{array}{l} [m, 0] \\ [p, q] \\ \left\{ \left[\begin{array}{l} M_k, 0 \\ P_k, Q_k \end{array} \right] \right\}_{k=1, 2, 3} \\ \left(\begin{array}{l} (m_k+1, n_k) \\ (p_k+1, q_k) \end{array} \right)_{k=1, 2, 3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} (a_p; a_p^{t_1}, a_p^{t_2}, a_p^{t_3}); (b_q; \beta_q^{t_1}, \beta_q^{t_2}, \beta_q^{t_3}) \\ \{ (e_{P_k}^k; \lambda_{P_k}^k, \lambda_{P_k}^{k'}) ; (f_{Q_k}^k; \mu_{Q_k}^k, \mu_{Q_k}^{k'}) \} \\ ((-l_k; \sigma_k), (c_{P_k}^k; \gamma_{P_k}^k); (d_{Q_k}^k; \delta_{Q_k}^k)) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} Z_1 s_1^{-\sigma_1} \\ Z_2 s_2^{-\sigma_2} \\ Z_3 s_3^{-\sigma_3} \end{array} \right]$$

जहाँ

1. $K\{d(x, y, z); v_1, v_2, v_3; s_1, s_2, s_3\}$

$$= \left(\frac{2}{\pi} \right)^{3/2} s_1 s_2 s_3 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (s_1 x)^{1/2} (s_2 y)^{1/2} (s_3 z)^{1/2} k_{v_1}(s_2 y) k_{v_2}(s_2 z) k_{v_3}(s_3 x) \\ \times \phi(x, y, z) dx dy dz$$

$$2. W\{\phi(x, y, z); \eta_1 + \frac{1}{2}, \eta_2 + \frac{1}{2}, \eta_3 + \frac{1}{2}; (k_1 + \frac{1}{2}, r_1), (k_2 + \frac{1}{2}, r_2); (k_3 + \frac{1}{2}, r_3); s_1, s_2, s_3\}$$

$$= s_1 s_2 s_3 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (s_1 x)^{-\eta_1 - 1/2} (s_2 y)^{-\eta_2 - 1/2} (s_3 z)^{-\eta_3 - 1/2} e^{-1/2(s_1 x + s_2 y + s_3 z)} \\ \times w_{k_1 + 1/2, r_1}(s_1 x) w_{k_2 + 1/2, r_2}(s_2 y) w_{k_3 + 1/2, r_3}(s_3 z) \phi(x, y, z) dx dy dz.$$

$$3. M\{\phi(x, y, z); k_1 + \frac{1}{2}, r_1, (k_2 + \frac{1}{2}, r_2), (k_3 + \frac{1}{2}, r_3); s_1, s_2, s_3\}$$

$$= s_1 s_2 s_3 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (s_1 x)^{-k_1 - 1/2} (s_2 y)^{-k_2 - 1/2} (s_3 z)^{-k_3 - 1/2} e^{-1/2(s_1 x + s_2 y + s_3 z)} \\ \times w_{k_1 + 1/2, r_1}(s_1 x) w_{k_2 + 1/2, r_2}(s_2 y) w_{k_3 + 1/2, r_3}(s_3 z) \phi(x, y, z) dx dy dz.$$

$$4. V\{\phi(x, y, z); k_1, r_1, (k_2, r_2), (k_3, r_3); s_1, s_2, s_3\}$$

$$= s_1 s_2 s_3 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (s_1 x)^{r_1 - 1/2} (s_2 y)^{r_2 - 1/2} (s_3 z)^{r_3 - 1/2} e^{-1/2(s_1 x + s_2 y + s_3 z)} \\ \times w_{k_1, r_1}(s_1 x) w_{k_2, r_2}(s_2 y) w_{k_3, r_3}(s_3 z) \phi(x, y, z) dx dy dz.$$

$$5. L\{\phi(x, y, z); s_1, s_2, s_3\}$$

$$= s_1 s_2 s_3 \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-s_1 x + s_2 y + s_3 z}) \phi(x, y, z) dx dy dz.$$

विशिष्ट दशाएँ

1. यदि $M_k = P_k = Q_k = 0$ तो हमें जैन तथा गोयल^[7] द्वारा परिभाषित $H(x, y, z)$ प्राप्त होता है।

2. यदि $m = p = q = 0$, $M_2 = P_2 = Q_2 = 0$ तथा सीमा को $Z \rightarrow 0$ लें तो हमें गुप्ता तथा मित्तल^[4] द्वारा परिभाषित दो चरों वाला सार्विकृत H -फलन प्राप्त होता है जो चतुर्वेदी तथा गोयल^[2b] एवं चतुर्वेदी^[2a] के फलन $A^*(x, y)$ में समानीत हो जाता है।

3. ऊपर दिये हुए प्रतिबन्धों के अतिरिक्त हम समस्त $\alpha', \beta', \lambda', \mu', \gamma', \delta'$ को एक के तुल्य रखते हैं तो हमें अग्रवाल^[1] के द्वारा परिभाषित सार्विकृत $G(x/y)$ प्राप्त होता है।

4. यदि $m = p = q = 0$, $M_k = P_k = Q_k = 0$, $m_2 = n_2 = m_3 = n_3 = p_2 = p_3 = q_2 = q_3 = 0$, तथा सीमायें $Y, Z \rightarrow 0$ हो तो हमें फाक्स^[3] का H -फलन प्राप्त होगा जो माइजर के G -फलन में समानीत हो जाता है यदि $\gamma_{p_1}^1 = \delta_{q_1}^1 = 1$ । चूँकि माइजर का G -फलन अनेक विशिष्ट फलनों का सार्विकृत रूप होता है अतः हमें अन्य ज्ञात फलनों से $H^*(x, y, z)$ के सम्बन्ध प्राप्त हो सकते हैं।

विवेचना

फलन $H^*(x, y, z)$ को उन फाक्स-प्रकार के H -फलनों से नहीं प्राप्त किया जा सकता है जिन्हें हाल ही में श्रीवास्तव तथा पंडा^[9], सक्सेना^[7,8] एवं गोयल तथा जैन^[5] ने परिभाषित किया है क्योंकि इसके प्राचल $s+t+u$ तथा $s+t, t+u, s+u$ रूप में भी पाये जाते हैं जो अन्यो में नहीं होते। साथ ही समस्त α', β' इत्यादि घनात्मक न होकर सम्मिश्र चरों x, y, z के साथ-साथ स्वयं भी सम्मिश्र होते हैं।

इस प्रकार तीन चरों F_E, F_F, F_G, F_H इत्यादि वाले सरन के फलनों को सुगमतापूर्वक प्राप्त किया जा सकता है क्योंकि जैन तथा गोयल^[5] ने अत्यन्त लम्बे तथा पेचीदे प्रतिस्थापनों को व्यवहृत करके इसे प्राप्त किया है (देखें जैन^[6] भी)। अन्य शोध पत्र में इसकी विवेचना की जावेगी।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर०पी०, प्रोसी०नेशनल इंस्टी०साइंस, 1965, 31A, 536-546
2. (a) चतुर्वेदी, के०के०, पी०एच०डी० थोसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय 1969
2. (b) चतुर्वेदी, के०के० तथा गोयल, ए० एन०, Indian Jour. Pure appl. Maths, 1972, 3, 357-360
3. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc, 1961, 98, 395-429.
4. गुप्ता, के०सी० तथा मित्तल, पी०के०, प्रोसी०नेशनल एके०साइंस, 1972, 75A, 172-193
5. जैन, के०सी० तथा गोयल, ए०एन०, Acta Cencia Indica 1977, 3, 259-264
6. जैन, के०सी०, पी०एच०डी० थोसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय, 1975
7. सक्सेना, आर०के०, Kyungpook Math. J., 1974, 14, 255-259
8. सक्सेना, आर०के०, वही, 1977, 17, 221-226
9. श्रीवास्तव, एच०एम० तथा पंडा, आर०, J. Reine Angew Math, 1976, 288, 129-145

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Vol. 26, No. 1, 1983

थैलिल सल्फाथायाजोल-काँपर संकुल

कु० शारदा गर्ग, बी० एस० पटेल तथा एस० एस० गुप्ता

रसायन प्रयोगशाला, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—माचं 12, 1982]

सारांश

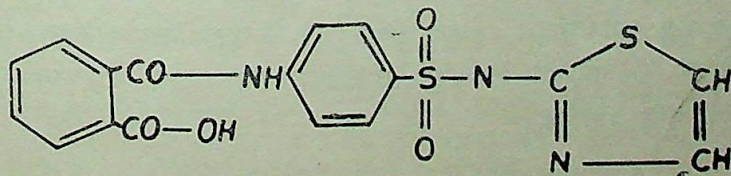
चालकतामूलक अनुमापन, स्पेक्ट्रमी अध्ययन तथा विश्लेषण आँकड़ों से ज्ञात होता है कि सल्फर औषधियों में थैलिल सल्फाथायाजोल, काँपर के साथ एल्कोहलीय माध्यम में 2:1 संकुल बनाता है। संकुल संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (I. R.) से भी की गई है।

Abstract

Phthalyl sulphathiazole : copper complex. By Km. Sharda Garg, V. S. Patel and S. S. Gupta, Chemical Laboratories, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

Phthalyl sulphathiazole [Benzoic acid, 2-(4-{(2-thiazolylamino)-sulfonyl} phenyl amino) carbonyl], a sulpha drug, forms 2:1 complex with copper in alcoholic solutions as indicated by conductometric titrations, spectrophotometric studies and analytical data. Structure assigned is supported by I. R. spectral bands.

थैलिल सल्फाथायाजोल (I) [बैंजोइक एसिड 2-(4-{2-थायाजोलिल एमीनो)-सल्फोनिल} फिनाइल एमीनो) कार्बोनिल] एक सल्फर औषधि है। Fe, Co, Ag, Au, Cu जैसी संक्रमण धातुएँ प्राचीन समय से ही आयुर्वेदिक, यूनानी तथा ऐलोपैथिक औषधियों में प्रयुक्त होती हैं। कौशल तथा सहायकों [1-9] ने कई धातु सल्फोनामाइड संकुल तैयार किये हैं तथा उनमें से कुछ अपनी मूल औषधियों से अधिक उपयोगी सिद्ध हुये हैं। इसी तथ्य को ध्यान में रखते हुये प्रस्तुत शोधपत्र में थैलिल सल्फाथायाजोल-काँपर संकुल वर्णित किया गया है।

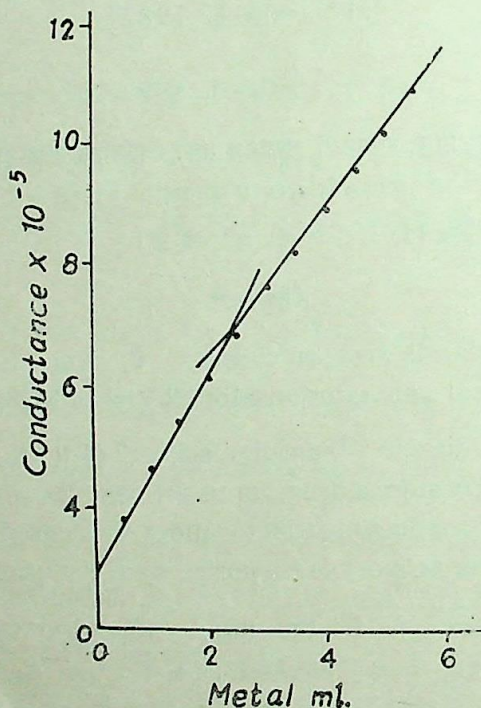


(I)

प्रयोगात्मक

संकुल का संयोजन :

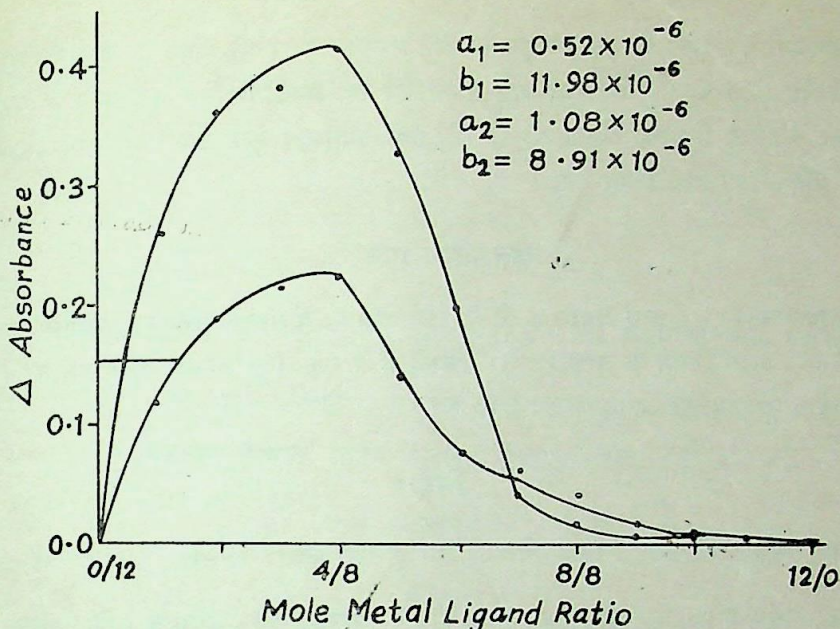
(अ) थैलिल सल्फाथायाजोल (0.01M) तथा क्युप्रिक क्लोराइड (0.02M) के मानक विलयन परिशुद्ध एथेनॉल में बनाये गये। लीगेन्ड के 10 मि०ली० विलयन को 50 मि० मी० तक तनु किया गया, तथा उसका अनुमापन धातु विलयन के साथ 'तोसनीवाल' चालकतामापी द्वारा 28° से० पर किया गया। आयतन संशोधन के बाद चालकता तथा धात्विक आयतन के बीच ग्राफ खींचा गया। प्राप्त परिणाम 2:1 थैलिल सल्फाथायाजोल-कॉपर संकुल की पुष्टि करते हैं।



चित्र 1 चालकता तथा धात्विक आयतन का आरेख

(ब) स्पेक्ट्रमापी अध्ययन द्वारा वोसवर्ग तथा कूपर ^[10] का प्रयोग करते हुये भी संकुल की प्रकृति का अध्ययन किया गया है। इसके लिये, थैलिल सल्फाथायाजोल तथा क्युप्रिक क्लोराइड (0.0125 M तथा 0.01M) के शुद्ध एथेनॉल में तैयार किये गये समआणविक विलयन के 2:1, 1:1 तथा 1:2 अनुपात के मिश्रण लिये गये तथा अवशोषण ज्ञात किया गया। प्राप्त परिणाम से 2:1 अनुपात के केवल एक संकुल की पुष्टि होती है।

(स) जॉब ^[11] की संतत विचरण विधि द्वारा अवशोषण अध्ययन से केवल 2:1 संकुल की पुनः पुष्टि होती है।



चित्र 2 अवशेषण तथा मोल धातु-लिगेण्ड अनुपात का आरेख

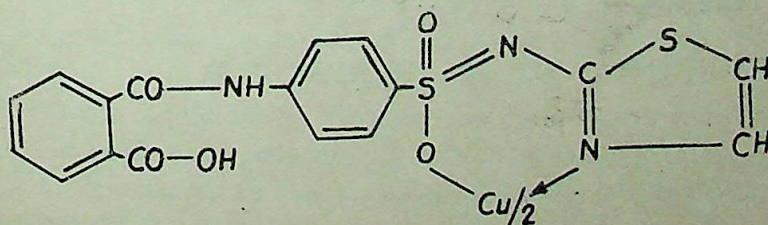
वियोजन तथा विश्लेषण

थैलिल सल्फाथायाजोल (2 ग्राम) तथा क्युप्रिक क्लोराइड (0.42 ग्राम) को अलग-अलग परिशुद्ध एल्कोहल की अल्प मात्रा में घोला गया। लीगेण्ड तथा धातु के विलयन को संतत विलोडन के साथ मिलाया गया तथा 2 घंटे तक रिफ्लक्स किया गया। विलायक की कुछ मात्रा को आसुत करके निकाल दिया गया तथा अवशेष को 24 घंटे के लिये रख दिया गया। फलस्वरूप हरे रंग का संकुल प्राप्त हुआ जिसे छानकर तथा एल्कोहल से धोकर शुद्ध किया गया। प्राप्ति 1 ग्राम; संकुल 245° से 0° पर पिघलता है।

संकुल में Cu 7.43, C 48.6, H 3.71, N 9.76 तथा S 15.1 प्रतिशत पाये गये जबकि $(C_{17}H_{13}N_3O_6S_2)_2 Cu$ में सिद्धांततः Cu 7.30; C 46.96, H 3.01, N 9.66 तथा S 14.74 प्रतिशत होना चाहिये।

विवेचना

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर थैलिल सल्फाथायाजोल-कॉपर संकुल को संरचना (II) द्वारा निरूपित किया जा सकता है।



(II)

संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (I.R.) अध्ययन द्वारा भी होती है जिसमें धातु-नाइट्रोजन का अवशोषण बैंड 635 cm^{-1} पर तथा धातु-ऑक्सीजन का अवशोषण बैंड 675 cm^{-1} पर प्राप्त होता है। संकुल का स्थायित्व स्थिरांक ($\text{Log } K=5.73$) तथा तदनुसार मुक्त ऊर्जा परिवर्तन ($\Delta F=-7.68$ किलोकैलोरी प्रति मोल) ज्ञात किया गया।

कृतज्ञता-ज्ञापन

शोधकार्य की सुविधाएँ प्रदान करने के लिये लेखक मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल के प्राचार्य डा०के० सी० निगम के आभारी हैं। लेखकों में से एक (कु०शारदा गर्ग) जूनियर रिसर्च फेलो-शिप के लिये सी०एस० आई० आर० के आभारी है।

निर्देश

1. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, जर्न इंडियन केमि० सोसा०, 1974, 51, 649
2. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दीकी, एस० तथा कौशल, आर०, जर्न इंडियन केमि० सोसा०, 1974, 51, 769
3. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, जर्न इंडियन केमि० सोसा०, 1975, 52, 642
4. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दीकी, एस० तथा कौशल, आर०, जर्न इंडियन केमि० सोसा० 1976, 53, 242
5. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दीकी, एस० तथा कौशल, आर०, साइंस एन्ड कल्चर, 1977, 43, 443
6. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1978, 21(3), 253
7. गुप्ता, एस०एस०, गुप्ता, कु० कुमुद तथा कौशल, आर०, विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1978, 21(3), 261
8. गुप्ता, एस० एस० तथा गुप्ता, कु० कुमुद, विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1980, 23 (1), 65
9. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1977, 20 (3), 223
10. वोसवर्ग, डब्ल्यू० सी० तथा कूपर, सी० आर०, जर्न अमे० केमि० सोसा०, 1941, 63, 437; 1942, 64, 1630
11. जाब, पी०, एन कीम०, 1928, 10, 113; 1936, 3, 97

थायोमैलिक अम्ल की सहायता से Ce(IV) का एम्पियरीय अनुमापन

ओ० पी० अग्रवाल, रजनी, तथा एस० पी० खटकड़

रसायन विभाग, महर्षि दयानन्द विश्वविद्यालय, रोहतक

[प्राप्त—अक्टूबर 10, 1982]

सारांश

1M पोटैशियम कार्बोनेट विलयन माध्यम में थायोमैलिक अम्ल (TSH) अनुमापक की सहायता से बिंदुपाती पारद इलेक्ट्रोड पर Ce(IV) के एम्पियरीय अनुमापन की एक नई विधि प्रस्तुत की गई है। इस माध्यम में Ce (IV) की कैथोडी तरंग तो पहले से ही ज्ञात थी परन्तु देखा गया कि TSH भी अपनी सामान्य एनोडी तरंग ($E_{1/2} = -0.52V$ Vs S.C.E.) देता है। अनुमापन वोल्टता ($-0.3V$) दोनों ही स्पीशीज के विसरण धारा क्षेत्र में पड़ती हैं। दोनों के मध्य कोई अभिक्रिया नहीं होती तथा अनुमापन का आधार कुछ अन्य ही कारक प्रतीत होने हैं। TSH:Ce(IV) मोलर अनुमापनी अनुपात 1:5 है तथा अनुमापन $2.5 \times 10^{-5}M - 5 \times 10^{-4}M$ Ce (IV) सांद्रता-परिसर में संभव है।

Abstract

Amperometric determination of Ce (IV) with the help of Thiomalic acid. By O.P. Agrawal, Rajani and S. P. Khatkar, Chemistry Department, Maharshi Dayanand University, Rohtak-124001.

A new amperometric method for the determination of Ce(IV) at d. m. e. involving the use of thiomalic acid (TSH) as titrant in 1 M K_2CO_3 medium is reported. Titration voltage ($-0.3V$ vs S.C.E.) falls in the diffusion region of both species. While a cathodic wave of Ce (IV) is known, TSH was found to give a reversible, diffusion controlled, one electron anodic wave ($E_{1/2} = -0.52V$) in this medium. No chemical interaction between the two species is indicated nor the titration is due to perfect compensation of cathodic current of Ce (IV) by the anodic current of TSH. However, the compensation effect along with changing polarographic characteristics of the two species in presence of each other seems to be responsible for the TSH : Ce (VI) titrimetric molar ratio of 1:5 in the cerium concentration range of $2.5 \times 10^{-5}M - 5 \times 10^{-4}M$.

यह ज्ञात है कि पोटैशियम कार्बोनेट विलयनों के माध्यम में Ce(IV) एक उत्क्रमणीय कैथोडी तरंग देता है जो बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड पर उसके एक इलेक्ट्रॉन अपचयन से उत्पन्न होती है [1-2]। लेखकों ने इसी तरंग का उपयोग Ce(IV) के एम्पियरीय अनुमापन के लिए किया है। चूँकि विलयन में पोटैशियम कार्बोनेट की सांद्रता 0.75M से कम होने पर Ce(IV) अवक्षेपित हो जाता है [3], अतः माध्यम के रूप में 1M पोटैशियम कार्बोनेट विलयन का प्रयोग किया गया।

प्रयोगात्मक

सभी अनुमापन, बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड (d.m.e.) पर किये गये तथा मानक इलेक्ट्रोड के रूप में संतृप्त कैलोमेल इलेक्ट्रोड (S.C.E.) का प्रयोग किया गया। सभी प्रयोगों के लिये तोशनीवाल द्वारा निर्मित हस्तचालित पोलैरोग्राफ का उपयोग किया गया। अन्वेषण कार्य में प्रयुक्त सभी यौगिक वैश्लेषिक श्रेणी के थे तथा उनके विलयन दुबारा आसुत जल में बनाये गये थे। प्रतिदिन 99.5% शुद्ध थायोमैलिक अम्ल (TSH) का ताजा विलयन बनाया जाता था। Ce(IV) के स्रोत के रूप में दो यौगिकों का प्रयोग किया गया—सीरिक सल्फेट तथा अमोनियम टेट्रासल्फेटोसीरेट (सीरिक अमोनियम सल्फेट)। इन दोनों ही यौगिकों के संग्रह विलयनों में सल्फ्यूरिक अम्ल की सांद्रता 0.5N रखी गई थी [4]।

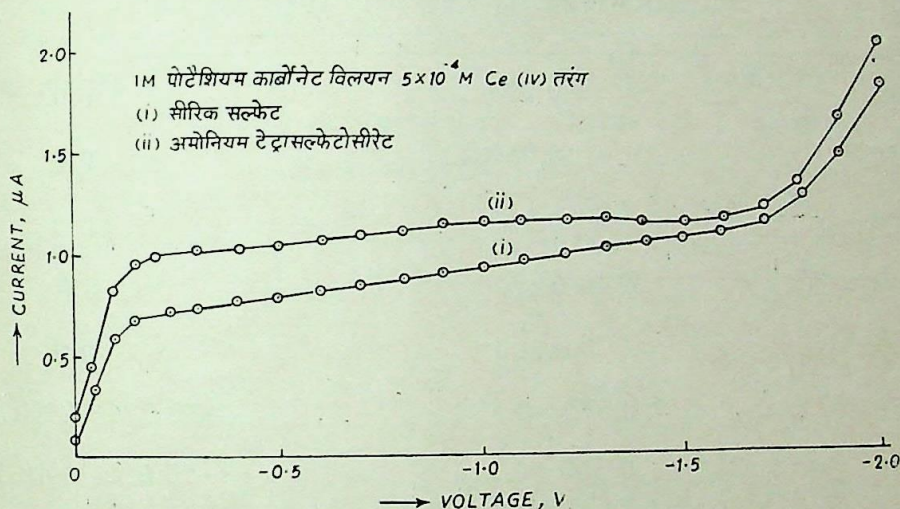
सभी प्रयोगों के दौरान शोधित नाइट्रोजन का वातावरण बनाये रखा गया।

परिणाम तथा विवेचना

लेखकों ने देखा कि थायोमैलिक अम्ल 1M कार्बोनेट विलयन में भी अन्य माध्यमों की भाँति [5-7] अपनी सामान्य एनोडी तरंग देता है। इस माध्यम में इसकी अर्धतरंग वोल्टता ($E_{1/2}$)— 0.52V पायी गयी। Ce(IV) के एम्पियरीय अनुमापन के लिए इसी अम्ल को अनुमापक के रूप में प्रयोग किया गया। सभी अनुमापन -0.3V पर किये गये। स्मरणीय है कि यह वोल्टता Ce(IV) तथा TSH, दोनों के ही विसरण धारा क्षेत्र में पड़ती हैं। Ce(IV) में TSH अनुमापक की थोड़ी-थोड़ी मात्रा मिलाते जाने पर पहले तो कैथोडी धारा क्रमशः कम होती गई और फिर एनोडी धारा में परिवर्तित हो कर बढ़ती गई। इस प्रकार एम्पियरीय वक्र की दो भुजायें (कैथोडी तथा एनोडी) प्राप्त हुईं जो एक दूसरे को TSH : Ce(IV) के मोलर सांद्रता अनुपात $1:5$ पर काटती थीं। इस शून्य-विक्षेप बिंदु (null point) पर कैथोडी धारा नगण्य सी ही शेष रहती है। उपर्युक्त अनुपात के आधार पर दोनों ही यौगिकों के Ce(IV) का अनुमापन $2.5 \times 10^{-5}\text{M}$ — $5 \times 10^{-4}\text{M}$ सांद्रता परिसर में अत्यन्त परिशुद्धता के साथ संपन्न हुआ यद्यपि अधिक सांद्र Ce(IV) विलयनों के अनुमापनों में अत्यधिक त्रुटि पाई गई। सारणी 1 में सम्मिलित सभी सांद्रताओं के अनुमापन तीन बार किये गये। $2.5 \times 10^{-5}\text{M}$ से अधिक तनु Ce(IV) विलयनों के अनुमापन की चेष्टा नहीं की गई क्योंकि कैथोडी धारा बहुत कम हो जाती है। अनुमापनों के दौरान Ce(IV) में TSH मिलाने पर सेल के विलयन के रंग में कोई परिवर्तन नहीं हुआ।

यही एम्पियरीय अनुमापन -0.8V पर भी करने का प्रयत्न किया गया। स्मरणीय है कि यह वोल्टता केवल Ce(IV) के विसरण धारा क्षेत्र में पड़ती है, यहाँ TSH तरंग अनुपस्थित रहती है।

सीरिक सल्फेट के अनुमापन के प्रयत्न असफल रहे क्योंकि क्रमशः TSH मिलाने पर Ce (IV) की कैथोडी धारा में अत्यन्त सीमित सी ही कमी होती है और कोई विश्वसनीय एम्पियरीय वक्र नहीं बन पाता। स्मरणीय है कि $-0.3V$ की अपेक्षा $-0.8V$ पर धारा-मान अधिक रहता है। ऐसा तरंग की विशिष्ट प्रकृति के कारण होता है (चित्र 1)। फिर भी दोनों ही वोल्टताओं पर तरंग विसरण-नियंत्रित है तथा उसकी उंचाई Ce(IV) सांद्रता की समानुपाती है। अमोनियम टेट्रासल्फेटोसीरेट के साथ $0.8V$ पर अनुमापन के प्रयत्न नहीं किए गये क्योंकि इसकी तरंग $0.4V$ के पश्चात् विकृत हो जाती है (चित्र 1)।



चित्र 1

$-0.3V$ पर ही इसी अनुमापन को उल्टी प्रकार से करने के प्रयत्न भी असफल रहे। TSH विलयनों में Ce (IV) विलयन क्रमशः मिलाने पर एनोडी धारा का धीरे-धीरे उन्मूलन तो हुआ परन्तु न तो कोई विश्वसनीय एम्पियरीय वक्र बन सका और न ही कोई निश्चित स्टोइकीयोमीट्री प्राप्त हुई।

लावेली एवं सहयोगियों^[8] के अनुसार अम्लीय माध्यम में Ce(IV), TSH को उपचित कर देता है। कार्बोनेट के क्षारकीय माध्यम में लेखकों को ऐसा कोई संकेत नहीं मिला। यह इसी से स्पष्ट है कि $-0.8V$ पर जहाँ TSH का विसरण धारा क्षेत्र अनुपस्थित है, अनुमापन संभव नहीं हो सका, क्योंकि Ce(IV) की कैथोडी धारा में अत्यन्त सीमित सी कमी हुई। ऐसी दशा में $-0.3V$ पर अनुमापन संभव होने का कारण यह लग सकता है कि शून्य विक्षेप बिंदु पर Ce(IV) की कैथोडी धारा TSH की एनोडी धारा द्वारा पूर्णरूपेण संतुलित हो जाती है। परन्तु यह भी पूर्ण सत्य नहीं है क्योंकि किसी भी सांद्रता के लिए Ce(IV) की धारा TSH की धारा की पंचमांश नहीं है। $-0.3V$ पर सल्फेट का i_d/c का मान 1.43 ± 0.01 था तथा अमोनियम टेट्रासल्फेटोसीरेट का 2.04 ± 0.01 जबकि TSH के लिए यह मान था 2.24 ± 0.01 । ऐसी दशा में प्रश्न उठता है कि शून्य विक्षेप बिन्दु के प्रदुर्भाव का कारण क्या है? इसका उत्तर पाने के लिए TSH एवं Ce(IV) के मिश्रण विलयनों के पोलैरोग्राम लिए गए। इन प्रयोगों के समूह में एक TSH की एक निश्चित मात्रा ($5 \times 10^{-5} M$) ली गई तथा TSH : Ce (IV) अनुपात

सारणी 1

सीरिक सल्फेट तथा अमोनियम टेट्रासल्फेटोसीरेट विलयनों का $-0.3V$ पर थायोमैलिक अम्ल की सहायता से अनुमापन

Ce (IV) विलयन की सांद्रता (C) $M \times 10^3$	TSH : Ce(IV) मोलर अनुमापनी अनुपात 1:5 के आधार पर परिकलित Ce(IV) विलयन की सांद्रता ($M \times 10^3$)	वृत्ति प्रतिशत परिसर
0.025	0.025	0.0
0.050	0.050	0.0
0.100	0.100	0.0
0.250	0.250	0.0
0.500	0.500	0.0
0.750	0.525—0.532	-30.0 . . . 29.07
1.000	0.500—0.515	-50.0 . . . -48.5
5.000	2.00—2.052	-60.0 . . . -58.96

सारणी 2

$5 \times 10^{-5}M$ TSH की उपस्थिति में सीरिक सल्फेट की कैथोडी धारा

सीरिक सल्फेट की कुल सांद्रता M	1:5 TSH Ce (IV) अनुपात की अपेक्षा Ce (IV) की अधिकता M	$-0.3V$ पर कैथोडी धारा		$0.8V$ पर कैथोडी धारा		टिप्पणी
		अपेक्षित μA	प्रेक्षित μA	अपेक्षित μA	प्रेक्षित μA	
5×10^{-4}	2.5×10^{-4}	0.3575	0.054	0.480	0.243	प्रेक्षित i_d/c
4×10^{-4}	1.5×10^{-4}	0.2145	~ 0	0.288	0.162	मान स्थिर
3×10^{-4}	5.0×10^{-5}	0.0715	~ 0	0.096	0.084	नहीं

सदैव 1:5 से अधिक रखा गया ताकि अनुमापन-अनुपात से अधिक Ce (IV) की धारा का अध्ययन किया जा सके (सारणी-2)। इसी प्रकार दूसरे समूह में सीरिक सल्फेट की मात्रा निश्चित ($5 \times 10^{-4}M$) रखी गई तथा TSH Ce(IV) अनुपात 1:5 से सदैव कम, ताकि वचे हुए TSH की धारा का अध्ययन किया जा सके (सारणी 3)।

सारणी 3

$5 \times 10^{-4}M$ सीरिक सल्फेट की उपस्थिति में TSH की एनोडी धारा

TSH की कुल सांद्रता M	1:5 TSH-Ce(IV) अनुपात के आधार पर TSH की अधिकता M	-0.3V पर एनोडी धारा अपेक्षित μA	प्रेक्षित μA	टिप्पणी
4×10^{-4}	3×10^{-4}	0.672	0.978	प्रेक्षित i_d/c
3×10^{-4}	2×10^{-4}	0.448	0.714	मान स्थिर नहीं हैं।
2×10^{-4}	1×10^{-4}	0.224	0.420	

सारणी 2 एवं 3 से स्पष्ट है कि एक दूसरे की उपस्थिति में दोनों स्पीशीज के धारा-मानों में परिवर्तन आ जाता है।

सारणी 2 से स्पष्ट है कि TSH की उपस्थिति में 1:5 अनुपात से अधिक का Ce (IV) भी -0.3V पर लगभग शून्य या अत्यल्प धारा उत्पन्न करता है। स्पष्टतः Ce (IV) की पोलैरोग्राफिक विशिष्टताओं में परिवर्तन हो जाता है। यह स्थिति -0.8V पर और स्पष्ट हो जाती है। सारणी 2 में इस वोल्टता के धारा संबंधी आंकड़े इस मान्यता पर आधारित हैं कि यहाँ भी केवल 1:5 अनुपात से अधिक की ही Ce (IV) धारा उत्पन्न करेगा। स्पष्टतः यह मान्यता ठीक नहीं है क्योंकि इस बात का उल्लेख किया जा चुका है कि अनुमापनों के दौरान इस वोल्टता पर कैथोडी धारा का बहुत सीमित उन्मूलन ही हो पाता है। फिर भी ये आंकड़े कम से कम यह तो स्पष्ट कर देते हैं कि TSH की उपस्थिति में सभी वोल्टताओं पर Ce (IV) की धारा कम ही रहती है। दूसरी ओर सारणी 3 से स्पष्ट है कि Ce (IV) की उपस्थिति में TSH की धारा बढ़ जाती है। ज्ञातव्य है कि धारा मानों के अतिरिक्त तरंगों में अन्य कोई विशेष परिवर्तन दृष्टिगोचर नहीं हुआ।

ऐसी दशा में शून्य विक्षेप बिंदु के प्रादुर्भाव के बारे में निश्चित रूप से कुछ भी नहीं कहा जा सकता। अतः यह तर्कसंगत लगता है कि शून्य विक्षेप की स्थिति लाने में कैथोडी-एनोडी धाराओं का कुछ

सीमा तक संतुलन तथा परिवर्तनशील पोलैरोग्राफीय विशिष्टताएँ मिलकर ऐसी परिस्थिति उत्पन्न कर देती हैं जिसमें Ce (IV) के एक विशेष सांद्रता परिसर के लिए 1:5 TSH : Ce (IV) अनुमापी अनुपात निश्चित हो जाता है। स्पष्टतः $5 \times 10^{-4} M$ से अधिक सांद्र Ce (IV) विलयनों में इन दोनों कारकों के मध्य साम्य स्थिति नहीं बन रह पाती और तब Ce (IV) की उपस्थिति में बढ़ती हुई TSH की ऐनोडी धारा (सारणी 3) के कारण अनुमापन अनुपात 1:5 से आगे बढ़ता चला जाता है, जिसके कारण अब पहले से कम TSH, Ce(IV) के साथ शून्य विक्षेप स्थिति पैदा करने में समर्थ हो जाता है। फलस्वरूप, अनुमापनों में अत्यधिक ऋणात्मक त्रुटि दृष्टिगोचर होने लगती है (सारणी 1)। सेल विलयन में Ce(IV) की अपेक्षा 20 गुणा अधिक सांद्रता में उपस्थित होने पर भी निम्नलिखित स्पीशीज, अनुमापन की शुद्धता को किसी भी प्रकार प्रवाहित नहीं करती :-

Na (I), Mg (II), Al (III), बैनेडेट, मॉलिब्डेट, टंगस्टेट, Cl^- , $CH_3 COO^-$, OX^{2-} , NO_3^- , SO_4^{2-} एवं $S_2O_3^{2-}$ । यह भी ज्ञातव्य है कि सेल विलयन में इन सभी स्पीशीज के एकसाथ उपस्थित रहने पर भी अनुमापन पूर्ण शुद्धता से सम्पन्न किये जा सकते हैं। परन्तु इन प्रयोगों के लिए Ce (IV) की किसी भी सांद्रता के लिये, प्रत्येक स्पीशीज की सांद्रता बराबर तथा अधिकतम $2.5 \times 10^{-4} M$ रखी गई। ऐसा विलयन को अतिसंतुप्त न होने देने के लिये किया गया। Ba(II) तथा Co(II) शुद्धता को तभी प्रभावित करते हैं जब सेल विलयन में उनका सांद्रण Ce(IV) की अपेक्षा दो गुणा से अधिक हो जबकि Mn(II), Ce (II) के लिये यह मात्रा Ce (IV) के बराबर से अधिक की है। Cr (III), Ni (II) एवं Zn (II) की सेल विलयन में Ce (IV) की अपेक्षा पाँच गुणा तक अधिक उपस्थिति से अनुमापन अप्रभावित रहते हैं जब कि Cu (II) की पूर्ण अनुपस्थिति अनुमापनों की शुद्धता के लिये अनिवार्य है। Hg (II), Fe (II) एवं Mn (VII) से Ce (IV) के अनुमापन तभी तक अप्रभावित रहते हैं जब तक उनकी सांद्रता सीरियम की अपेक्षा 1/25 गुणा से अधिक न हो।

निर्देश

1. डोलेजाल, जे० तथा नोवाक, जे०, Colln. Czech, Chem. Commun, 1959, **24**, 2182.
2. वही, Chem. Listy, 1958, **52**, 582.
3. कपूर, आर० सी० तथा अग्रवाल, बी० सी०, Indian J. Chem., 1972, **10** (5), 551.
4. बोगेल, ए०आई०, A Textbook of Quantitative Inorganic Analysis, तृतीय संस्करण, दि इंग्लिश लैंग्वेज बुक सोसाइटी तथा लांगमैन्स, लंदन, 1968, 314.
5. कपूर, आर०सी० तथा तिवारी, एस०के०, Proc. Natl. Acad. Sci India, 1959, **A28**, 52.
6. वही, वही, 1959, **A28**, 272.
7. वही, वही, 1959, **A28**, 278.
8. लावेलो, डी० के०, सुलिवान, जे० सी० तथा डायट् श० ई०, Inorg. Chem, 1973, **12**(6), 1440.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 26, No. 2, 1983

भारत में आयोजित उपग्रह गोष्ठियाँ

ओ० पी० एन० कल्ला

चेयरमैन, संचार क्षेत्र, अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र, अहमदाबाद

एम० एल० हसीजा, तथा काली शंकर

दिल्ली भू-केन्द्र, अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र, नई दिल्ली

[प्राप्त—दिसम्बर 10, 1982]

सारांश

किसी भी सेमीनार या गोष्ठी को कार्यशील करने के लिए गोष्ठी या सेमीनार से सम्बन्धित भागीदारों को किसी एक स्थान पर इकट्ठा होना पड़ता है। सेमीनार के गन्तव्य स्थान तक पहुँचने के लिए काफी लम्बी यात्राएं भी करनी पड़ती हैं। कभी-कभी समयाभाव अथवा व्यक्तिगत कारणों से भागीदार लोग सेमीनार अथवा सम्बन्धित गोष्ठी में सम्मिलित नहीं हो पाते हैं। प्रस्तुत लेख में भारत में उपग्रह के माध्यम से आयोजित कुछ प्रमुख गोष्ठियों के तकनीकी एवं लाभदायक पहलुओं पर प्रकाश डाला गया है। इनमें से एक गोष्ठी का आयोजन "एपल" उपग्रह के माध्यम से किया गया जिसके अन्तर्गत भारत के प्रधान मंत्री ने एपल उपग्रह को देश को समर्पित किया तथा इस कार्यक्रम में दिल्ली और अहमदाबाद के लोगों ने इस प्रकार भाग लिया जैसे वे एक दूसरे के सामने बैठे हों। दूसरी उपग्रह गोष्ठी के अन्तर्गत उपग्रह के द्वारा एक सेमीनार का आयोजन किया गया, जिसमें दिल्ली, मद्रास, अहमदाबाद एवं कलकत्ता से लोगों ने भाग लिया।

Abstract

Satellite conferences held in India. By O. P. N. Calla, Chairman, Communication Area, Space Applications Centre, Ahmedabad, M. L. Hasija, and Kali Shanker, Delhi Earth Station, Space Applications Centre, New Delhi.

To conduct any seminar or a meeting, the concerned participants have to assemble at a common location. Many times the participants have to travel a lot

to attend a seminar or a meeting and sometimes it becomes impossible to attend these seminars or meetings due to lack of time and various other personal reasons. This paper has dealt with the technical and useful aspects of some of the satellite conferencing events held in India. Among these, one of the satellite conferencing events was the inauguration of 'APPLE' Satellite via 'APPLE' Satellite by the Prime Minister of India in which the people from Delhi and Ahmedabad took part in such a way as if they were sitting before each other while the reality was that they were sitting thousands of kilometers away from each other. Another satellite conferencing event was the conduction of a satellite seminar attended by the people sitting at Delhi, Madras, Ahmedabad and Calcutta.

1. परिचय

उपग्रह संचार आधुनिक संचार प्रणाली की एक महानतम देन है। पृथ्वी के विशाल क्षेत्र में संचार व्यवस्था स्थापित करने की क्षमता रखने के कारण उपग्रह संचार प्रणाली का प्रयोग विभिन्न दूरस्थ स्थानों एवं भौगोलिक दृष्टि से पहुँच के बाहर के लोगों के बीच विभिन्न प्रकार के सेमीनार एवं गोष्ठियों का आयोजन करने के लिए किया जा सकता है। उपग्रह के माध्यम से आयोजित इन गोष्ठियों या सेमीनारों को निम्नलिखित दो श्रेणियों में विभाजित किया जा सकता है :

(क) आडियो उपग्रह गोष्ठियाँ

(ख) वीडियो उपग्रह गोष्ठियाँ

आडियो उपग्रह गोष्ठियों में विभिन्न दूरस्थ स्थानों से भाग लेने वाले भागीदार केवल एक दूसरे के विचारों को सुन सकते हैं लेकिन एक दूसरे को देख नहीं सकते। वीडियो उपग्रह गोष्ठियों में एक दूसरे के विचारों को सुनने के साथ-साथ एक दूसरे को देखा भी जा सकता है, जिससे ऐसा आभास होता है कि गोष्ठी में भाग लेने वाले सारे भागीदार जैसे एक दूसरे के आमने-सामने बैठे हों जबकि वास्तव में वे एक दूसरे से सैकड़ों एवं हजारों मील दूर बैठे होते हैं।

मानव सभ्यता के विकास के साथ-साथ लोगों का व्यक्तिगत जीवन इतना व्यस्त होता जा रहा है कि कभी-कभी किसी विशेष स्थान या किसी विशेष शहर में जाकर किसी सभा या समारोह में भाग लेना मुश्किल तथा कभी-कभी कुछ विशेष व्यक्तिगत एवं अन्य परिस्थितियों के कारण बिल्कुल ही असम्भव हो जाता है। इसका एक प्रमुख कारण गन्तव्य स्थान तक पहुँचने के लिए लम्बी दूरियों का तय करना है, जिनमें काफी धन खर्च होता है। अमरीका में एक सर्वेक्षण के अनुसार अमरीका में ऊर्जा के विभिन्न साधनों पर होने वाले खर्च का एक चौथाई हिस्सा यातायात पर खर्च किया जाता है। जनसंख्या के बढ़ने के साथ-साथ यह खर्च और भी बढ़ सकता है तथा इस तरह की परिस्थिति अपने देश में भी आ सकती है। लोगों का एक शहर में जाकर दूसरे शहर के अन्य लोगों से मिलने के तरीके को संदेश प्रक्रिया

(इनफार्मेशन प्रोसेसिंग) कहते हैं। संदेश प्रक्रिया का यह तरीका संचार साधनों जैसे उपग्रह संचार तकनीक, माइक्रोवेव तकनीक या कोएक्सल केबल संस्थान प्रयोग करके की जा सकती है जिसके अन्तर्गत लोगों को अनावश्यक आवागमन की समस्या से छुटकारा मिल सकता है तथा इस प्रकार अनावश्यक यात्राओं तथा उन पर होने वाले खर्च को काफी कम किया जा सकता है। कुछ प्राप्त आंकड़ों के आधार पर इस तथ्य की पुष्टि दो लोगों के द्वारा 600 कि० मी० की यात्रा करके किसी अन्य शहर में जाकर दो लोगों से मिलने में खर्च ऊर्जा की उन्हीं दो लोगों के द्वारा गन्तव्य स्थान के दो लोगों से उपग्रह के माध्यम से मिलने में खर्च ऊर्जा से तुलना करके की जा सकती है। अगर रेल यात्रा का प्रयोग किया जाय तो उसमें वीडियो उपग्रह गोष्ठी की अपेक्षा चार गुना ज्यादा ऊर्जा खर्च होगा तथा अगर आडियो उपग्रह गोष्ठी का प्रयोग किया जाय तो रेल यात्रा सम्पादित गोष्ठी में 300 गुना ज्यादा ऊर्जा खर्च होगा।

विदेशों में इस प्रकार की गोष्ठियों का आयोजन होता रहा है। अमेरिकी अन्तरिक्ष संस्था नासा ने “अपोलो” कार्यक्रमों के बीच बहुत सी उपग्रह गोष्ठियों का आयोजन किया था। इसमें कई बार तो 11 संस्थाओं तक ने भाग लिया। उपग्रह गोष्ठी के प्रत्येक केन्द्र से पचास-पचास लोगों ने गोष्ठी में भाग लिया तथा अपने-अपने विचार रखे। “अपोलो” कार्यक्रमों का तकनीकी एवं उपयोगिता का विश्लेषण करना “नासा” के द्वारा आयोजित इन उपग्रह गोष्ठियों का मुख्य उद्देश्य था। अमरीकी विश्वविद्यालयों एवं कालेजों में विशेष विषय की कक्षाओं का आयोजन भी उपग्रह प्रणाली के माध्यम से होता है।

2. उपग्रह गोष्ठियों का तकनीकी संस्थान

उपग्रह गोष्ठियों का तकनीकी संस्थान चित्र (1) में दिखाया गया है।

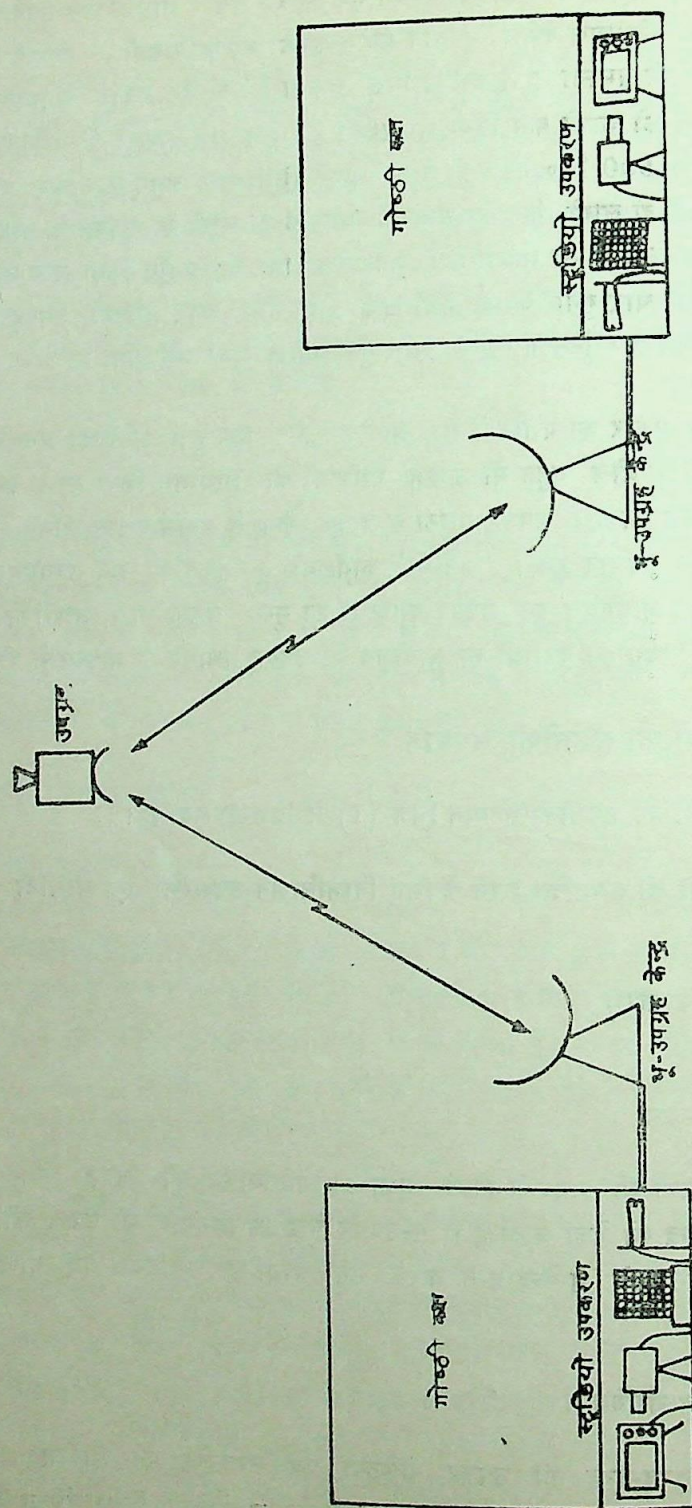
उपग्रह गोष्ठियों को सम्पादित करने के लिए निम्नलिखित उपकरणों एवं संस्थानों की आवश्यकता पड़ती है :

- (क) स्टूडियो उपकरण
- (ख) उपग्रह
- (ग) भू-उपग्रह केन्द्र

स्टूडियो उपकरणों की मदद से गोष्ठी सभा की गतिविधियों को विद्युत सिगनल में परिवर्तित करके उसे भू-उपग्रह केन्द्र को भेजा जाता है। भू-उपग्रह केन्द्र इस सिगनल को उपग्रह की ओर भेजता है जिसे गोष्ठी में भाग लेने वाले भू-केन्द्र प्राप्त करके उसे सम्बन्धित स्टूडियो एवं गोष्ठी कक्ष में भेज देते हैं।

3. भारत में उपग्रह गोष्ठियाँ

भारत में भी तरह-तरह की उपग्रह गोष्ठियों एवं समारोह का आयोजन दो प्रमुख उपग्रहों “सिम्फोनी” एवं “एपल” को प्रयोग करके किया गया। ये उपग्रह गोष्ठियाँ निम्नलिखित हैं :



चित्र 1 उपग्रह गोष्ठी का तकनीकी संस्थान

वीडियो उपग्रह गोष्ठी

- (क) एपल उपग्रह का उपग्रह उद्घाटन समारोह
- (ख) सिम्फोनी उपग्रह के द्वारा सेमीनार
- (ग) सिम्फोनी उपग्रह के द्वारा रायस्टिंग (पश्चिमी जर्मनी) एवं नई दिल्ली के बीच उपग्रह गोष्ठी ।

भाडियो उपग्रह गोष्ठी

- (क) इन्डियन इंस्टीट्यूट ऑफ टेक्नालॉजी, कानपुर एवं अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र अहमदाबाद के बीच उपग्रह गोष्ठी
- (उ) बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी एवं अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र, अहमदाबाद के बीच उपग्रह गोष्ठी ।

4. उपग्रह के द्वारा "एपल" का उद्घाटन समारोह

13 अगस्त 1981 को भारत की प्रधान मन्त्री ने "एपल" उपग्रह को देश को समर्पित किया । यह उद्घाटन समारोह एपल उपग्रह के द्वारा दिल्ली भू-केन्द्र और अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र अहमदाबाद के विक्रम हाल के बीच सम्पन्न हुआ जहाँ "एपल" उपग्रह के निर्माण से सम्बन्धित वैज्ञानिक एवं अभियन्ता बैठे हुए थे । 20 मिनट का यह समारोह एपल के माध्यम से कलकत्ता, मद्रास, पूना एवं बम्बई में भी देखा गया । यह एक वीडियो उपग्रह गोष्ठी थी ।



चित्र 2 एपल उपग्रह उद्घाटन समारोह का दृश्य

दिल्ली भू-केन्द्र में प्रधान मन्त्री का स्वागत भारतीय अन्तरिक्ष अनुसन्धान संगठन के चेयरमैन किया। उसके बाद भारतीय अन्तरिक्ष अनुसन्धान संगठन के चेयरमैन ने अहमदाबाद के विक्रम हाल में बैठे हुए पाँच प्रमुख वैज्ञानिकों का परिचय एपल उपग्रह के द्वारा प्रधान मन्त्री से कराया। वारी-वारी ये वैज्ञानिक खड़े होते गये तथा प्रधान मन्त्री का हाथ जोड़कर अभिनन्दन करते गये। उसके बाद प्रधान मन्त्री ने “एपल” उपग्रह को देश को समर्पित किया। उसके बाद केन्द्रीय संचार मन्त्री एवं केन्द्रीय सूचना एवं प्रसारण मन्त्री ने भाषण दिया। तत्पश्चात् विक्रम हाल में बैठे हुए दूरसंचार अनुसन्धान केन्द्र के निदेशक, दूरदर्शन विभाग के डाइरेक्टर जनरल एवं अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र अहमदाबाद के निदेशक “एपल” उपग्रह के उपयोग से सम्बन्धित पूरी जानकारी से प्रधान मन्त्री को अवगत कराया। एपल उपग्रह उद्घाटन समारोह की कुछ भलकियाँ चित्र 2 में दिखाई गई हैं।

4.1 उपग्रह उद्घाटन समारोह का तकनीकी संस्थान

उपग्रह उद्घाटन का तकनीकी संस्थान चित्र 3 में दिखाया गया है। तकनीकी संस्थान निम्नलिखित 3 भागों में बाँटा जा सकता है :

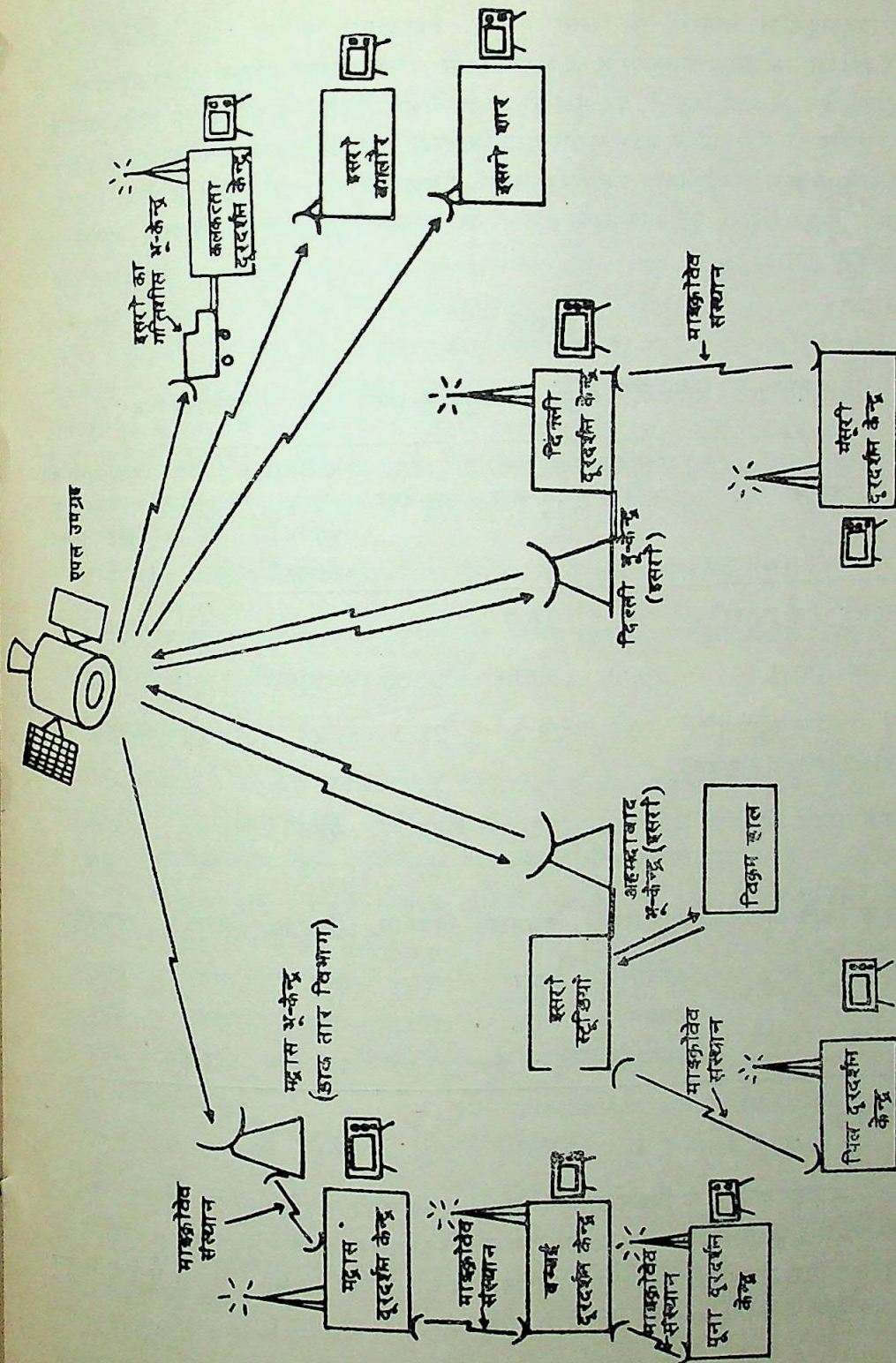
(क) एपल उपग्रह

एपल भारत में निर्मित पहला 3-अक्षीय भार सन्तुलित संचार उपग्रह है जिसे 19 जून, 1981 को योरपीय अन्तरिक्ष संस्था (ई० एस० ए०) के एरियन राकेट की मदद से अन्तरिक्ष में छोड़ा गया। इस उपग्रह एपल का निर्माण भारतीय अन्तरिक्ष अनुसन्धान संगठन ने देश के अन्दर किया। इस संचार उपग्रह का उपयोग भारत विभिन्न प्रकार के संचार प्रयोगों के करने के लिए करेगा। एपल उपग्रह 102 पूर्व देशान्तर पर स्थित है। इस उपग्रह के कुछ प्रमुख तकनीकी आंकड़े सारणी 1 में दिये गये हैं।

सारणी 1

एपल उपग्रह का तकनीकी विवरण

1. उपग्रह का भार (अन्तरिक्ष में छोड़ते समय)	: 630 कि०ग्रा०
2. प्रेषण आवृत्ति	: 4160 मेगासाइकिल
3. अभिग्रहण आवृत्ति	: 5925—6425 मेगासाइकिल
4. उपग्रह की माप	: 1200 मि०मी० व्यास 1200 मि०मी० ऊँचाई
5. सौर ऊर्जा संस्थान से प्राप्त विद्युत ऊर्जा	: 241 वाट (प्रारम्भ में)
6. उपग्रह की बीकन तरंग	: 4095 मेगासाइकिल
7. उपग्रह की प्रेषण पावर	: 31.5 डी०बी० डब्ल्यू०
8. उपग्रह के एन्टेना का व्यास	: 900 मि०मी० परवलयकार



चित्र 3 एपल उपग्रह उद्घाटन समारोह का तकनीकी संस्थान

(ख) भू-केन्द्र

उपग्रह उद्घाटन समारोह में दिल्ली भू-केन्द्र, अहमदाबाद भू-केन्द्र, मद्रास भू-केन्द्र, गतिशील भू-केन्द्र (ट्रैकट) जो उस समय कलकत्ता में था, बंगलौर में कम्प्यूटर इन्टर-कनेक्ट भू-केन्द्र तथा शार के मिशन सहायक केन्द्र ने भाग लिया। इन भू-केन्द्रों का तकनीकी विवरण सारणी 2 में दिया गया है। उद्घाटन समारोह का सजीव प्रेषण कई स्थानीय दूरदर्शन केन्द्रों द्वारा किया गया। मद्रास से यह कार्यक्रम माइक्रोवेव लिंक के द्वारा बम्बई भेजा गया तथा बम्बई से माइक्रोवेव के द्वारा यह पूना भेजा गया जहाँ इसका स्थानीय दूरदर्शन द्वारा पुनः प्रेषण किया गया। यह प्रोग्राम एपल उपग्रह के द्वारा मद्रास तथा बंगलौर भी भेजा गया।

सारणी 2

भारतीय उपग्रह गोष्ठियों में प्रयुक्त कुछ प्रमुख भू-उपग्रह केन्द्रों का तकनीकी विवर

आंकड़ा	अहमदाबाद भू-केन्द्र	दिल्ली भू-केन्द्र	मद्रास भू-केन्द्र	गतिशील भू-केन्द्र (ट्रैकट)	शार भू-केन्द्र	बंगलौर की कम्प्यूटर इन्टर-कनेक्ट भू-केन्द्र
1. एन्टेना का व्यास (मीटर)	14	10.7	10.7	6.1	6.1	6.1
2. प्रेषण पावर (वाट)	3000	3000	3000	3000	20	20
3. स्टेशन की फीगर आफ मेरिट (डी०बी० प्रति डिग्री केल्विन)	30	28.5	28.5	24	21	21
4. एन्टेना के माउन्ट की किस्म	एजिमथ/ एलीवेशन	एक्स/ वाई	एक्स/ वाई	एक्स/ वाई	एक्स/ वाई	एक्स/ वाई
5. एन्टेना के घुमाने का तरीका	विद्युतीय	विद्युतीय	विद्युतीय	विद्युतीय	विद्युतीय	विद्युतीय
6. उपग्रह को ट्रैक करने का तरीका	स्वचालित/ मैनुअल, प्रोग्राम स्ल्यू	आन/ आफ, स्टेप-ट्रैक	आन/ आफ, स्टेप-ट्रैक	आन/ आफ, स्टेप-ट्रैक	आन/ आफ, स्टेप-ट्रैक	आन/ आफ, स्टेप-ट्रैक

(ग) स्टूडियो उपकरण

दिल्ली एवं अहमदाबाद के विक्रम हाल में समारोह की सारी गतिविधियों के चित्रांकन के लिए अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र के टेलीविजन कैमरा एवं अन्य स्टूडियो उपकरण प्रयोग किये गये। स्टूडियो को कार्यशील करने का सारा उत्तरदायित्व अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र अहमदाबाद का था। दिल्ली भू-केन्द्र में इस के लिए एक लघु स्टूडियो बनाया गया था जो दिल्ली भू-केन्द्र से जोड़ा गया था।

5. उपग्रह सेमीनार

1979 में भारत में पहली बार उपग्रह सेमीनार का आयोजन फ्रान्स एवं जर्मनी के सहयोग से निर्मित उपग्रह "सिम्फोनी" को प्रयोग करके किया गया। यह वीडियो उपग्रह सेमीनार था जिसमें सेमीनार के भागीदार एक दूसरे को देख सकते थे। "सिम्फोनी" उपग्रह भारत को दो साल के लिए संचार के क्षेत्र में विभिन्न प्रकार के प्रयोग करने के लिए प्रदान किया गया था। प्रयोगों की इस श्रृंखला को संक्षिप्त में "स्टेप" (सैटलाइट टेलीकम्युनिकेशन एक्सपेरिमेंट प्रोजेक्ट) कहते हैं। 19-20 मार्च 1979 को अहमदाबाद में आयोजित इस विशेष उपग्रह सेमीनार में "स्टेप" के अन्तर्गत किये गये संचार प्रयोगों एवं उपग्रह भू-केन्द्रों की तकनीकी विवेचना इस सेमीनार का मुख्य विषय था। इस उपग्रह सेमीनार को "स्टेप सेमीनार" भी कहते हैं। सेमीनार भी विशेष बात यह थी कि इस सेमीनार का मुख्य केन्द्र तो अहमदाबाद था लेकिन इसमें कलकत्ता, दिल्ली एवं मद्रास के लोगों ने अपने-अपने शहरों में मौजूद रहते हुए भी इस सेमीनार में भाग लिया। उपग्रह के माध्यम से विभिन्न स्थानों में अहमदाबाद के सेमीनार में भाग लेने वाले लोगों को ऐसा आभास हुआ जैसे कि वे सब एक दूसरे के आमने-सामने बैठे हुए हैं जबकि वे वास्तव में एक दूसरे से हजारों मील की दूरी पर बैठे हुए थे।

5.1 उपग्रह सेमीनार के लिए प्रयोग किया गया तकनीकी संस्थान

अहमदाबाद में अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र के विक्रम हाल में आयोजित उपग्रह सेमीनार के तकनीकी संस्थान को तीन भागों में विभाजित किया जा सकता है :

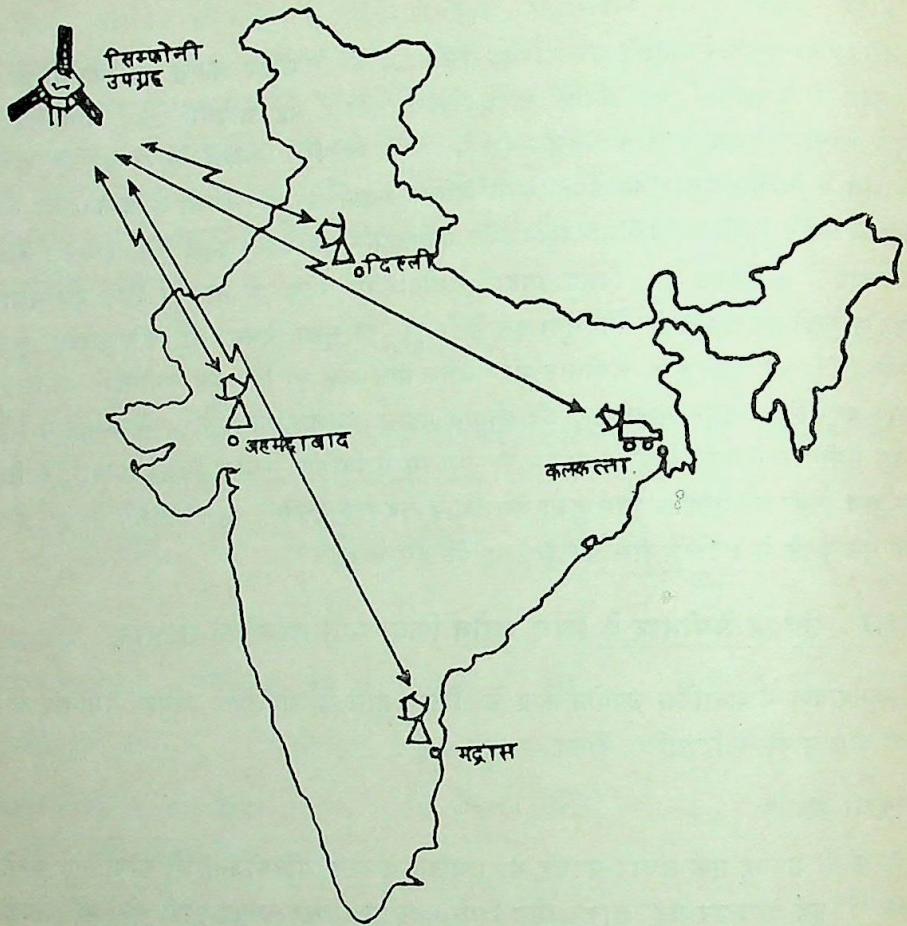
(क) सिम्फोनी उपग्रह

सिम्फोनी उपग्रह एक संचार उपग्रह था। भारत में स्टेप परियोजना को कार्यान्वित करने के लिए इस उपग्रह 49° पूर्व देशान्तर पर लाकर छोड़ दिया गया था। यह उपग्रह पृथ्वी की ओर प्रेषण के लिए 4000 मेगासाइकिल तथा पृथ्वी से अभिग्रहण के लिए 6000 मेगासाइकिल तरंग का प्रयोग करता था। इस उपग्रह के कुछ प्रमुख तकनीकी विवरण सारणी 3 में दिये गये हैं। उपग्रह सेमीनार का तकनीकी संस्थान चित्र (4) में दिखाया गया है।

सारणी 3

सिम्फोनी उपग्रह का तकनीकी विवरण

उपग्रह की श्रेणी	: 3-अक्षीय भार सन्तुलित समकालिक संचार उपग्रह
उपग्रह का भार	: 402 कि०ग्रा० (प्रमोचन के समय)
उपग्रह की माप	: ऊँचाई - 0.5 मी०, व्यास - 6.8 मी० (सौर ऊर्जा पैनलों की खुली अवस्था में)
सौर ऊर्जा संस्थान से प्राप्त विद्युत ऊर्जा	: 303 वाट (प्रारम्भ में)
ट्रान्सपान्डरों की संख्या	: 2, प्रत्येक की बैंड चौड़ाई 90 मेगाहर्ट्स
प्रेषण आवृत्ति	: 4000 मेगाहर्ट्स बैंड
अभिग्रहण आवृत्ति	: 6000 मेगाहर्ट्स बैंड



चित्र 4 भारत में उपग्रह सेमीनार का तकनीकी संस्थान

(ख) सेमीनार के चार केन्द्र

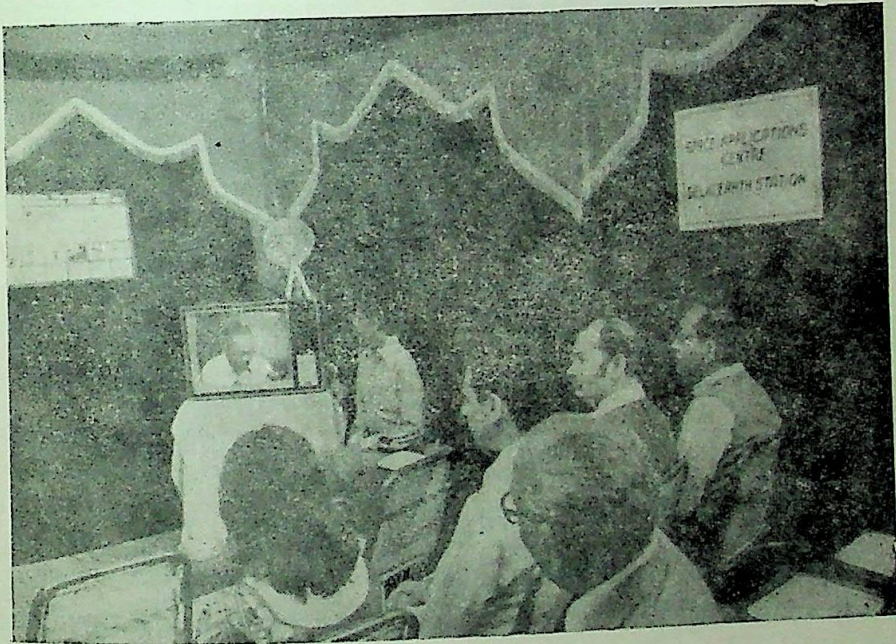
दिल्ली, मद्रास, कलकत्ता व अहमदाबाद को आपस में जोड़ने के लिए दिल्ली भू-केन्द्र, मद्रास भू-केन्द्र, गतिशील भू-केन्द्र एवं अहमदाबाद भू-केन्द्रों ने भाग लिया। सेमीनार के समय गतिशील भू-केन्द्र कलकत्ता में था। इन सारे भू-केन्द्रों का निर्माण देश के अन्दर किया गया। इन भू-केन्द्रों का तकनीकी विवरण सारणी 2 में दिया गया है। सेमीनार के समय सभी भू-केन्द्रों के एन्टेना सिम्फोनी उपग्रह की ओर उन्मुख थे।

(ग) टेलीविजन एवं स्टूडियो उपकरण

उपग्रह गोष्ठी के प्रत्येक केन्द्र में टेलीविजन कैमरों एवं अन्य आडियो उपकरणों का प्रबन्ध था। अहमदाबाद में अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र के विक्रम हाल में जो कि उपग्रह सेमीनार का मुख्य केन्द्र था, एक लघु स्टूडियो का निर्माण किया गया था। उपग्रह सेमीनार का प्रत्येक केन्द्र सम्बन्धित भू-उपग्रह केन्द्र से जुड़ा हुआ था।

5.2 उपग्रह सेमीनार की विवेचना

उपग्रह सेमीनार का प्रारम्भ अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र के निदेशक के भाषण से प्रारम्भ हुआ। इस उपग्रह सेमीनार के उद्घाटन के विषय में विशेष बात यह थी कि यद्यपि सेमीनार अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र अहमदाबाद के विक्रम हाल में सम्पन्न हुआ लेकिन इसका उद्घाटन दिल्ली से उपग्रह के माध्यम से इलेक्ट्रानिक्स कमीशन के चेयरमैन द्वारा किया गया। उपग्रह सेमीनार की भलकियाँ चित्र (5) एवं चित्र (6) में दिखाई गई है।



चित्र 5 उपग्रह सेमीनार का एक दृश्य (दिल्ली से)

इस सेमीनार के दौरान स्टेप परियोजना के अन्तर्गत किये गये विभिन्न संचार प्रयोगों—रेडियो नेटवर्किंग, एक चैनल प्रति कैरियर प्रयोग, डी० सी० एम० ए० प्रयोग, कामनेक्स, बहुसंख्यीय श्रव्य सरणी युक्त टेलीविजन पर प्रकाश डाला गया तथा उनकी उपयोगिता का विश्लेषण किया गया। 'स्टेप' परियोजना के अन्तर्गत प्रयोग किये गये विभिन्न भू-केन्द्रों की विश्वसनीयता का भी विमोचन किया गया। प्रयोगों एवं भू-केन्द्रों से सम्बन्धित अनेक पेपर (निबन्ध) भी पढ़े गये। सम्बन्धित विषयों पर अहमदाबाद एवं सेमीनार के अन्य तीन केन्द्रों के भागीदारों ने प्रश्न किये जिनका सम्बन्धित वक्ताओं ने यथोचित उत्तर दिया।



चित्र 6 उपग्रह सेमीनार का एक दृश्य (विक्रम हाल, अहमदाबाद से)

6. भारत में हुई उपग्रह गोष्ठी की कुछ अन्य घटनाएँ

उपग्रह के माध्यम से आयोजित उपर्युक्त स्टेप सेमीनार भारत में उपग्रह गोष्ठी की सबसे बड़ी घटना थी। इसके अलावा भी भारत में कुछ अन्य उपग्रह गोष्ठियों का आयोजन किया गया जो निम्न है :

6.1 रायस्टिंग पश्चिमी जर्मनी और दिल्ली भू-केन्द्र, दिल्ली के बीच वीडियो उपग्रह गोष्ठी

रायस्टिंग एवं दिल्ली के बीच वीडियो उपग्रह गोष्ठी के लिए भी सिम्फोनी उपग्रह का प्रयोग किया गया। गोष्ठी का मुख्य उद्देश्य रायस्टिंग एवं नई दिल्ली की परमाणु घड़ियों का समकालन (सिंक्रोनाइजेशन) करना था।

बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय वाराणसी एवं अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र, अहमदाबाद तथा इन्डियन इन्स्टीट्यूट ऑफ टेक्नालॉजी कानपुर एवं अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र अहमदाबाद के स्टाफ सदस्यों के बीच भी उपग्रह गोष्ठियों का आयोजन किया गया। ये दोनों गोष्ठियाँ वीडियो उपग्रह गोष्ठियाँ थीं। इसके लिए अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र अहमदाबाद का आपातकालीन भू-केन्द्र बारी-बारी से वाराणसी एवं कानपुर ले जाया गया। इस आपातकालीन भू-केन्द्र के सारे उपकरण एक जीप के अन्दर लगे हुए थे। इस गोष्ठी के लिए “सिम्फोनी” उपग्रह का प्रयोग किया गया।

भारत के लिए उपग्रह गोष्ठियों का महत्व

भारत जैसे विकासशील देश के लिए उपग्रह गोष्ठियां कृषि, शिक्षा एवं स्वास्थ्य के क्षेत्र में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभा सकती है, इसका प्रमाण उपग्रह शैक्षणिक दूरदर्शन प्रयोग (साइट) से सिद्ध हो चुका है। उपग्रह गोष्ठी के माध्यम से अनावश्यक यात्रा को भी कम किया जा सकता है। इसके द्वारा भारत के गांवों एवं पिछड़े हुए इलाकों में प्रौढ़ शिक्षा को भी बढ़ावा दिया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत लेख से सम्बन्धित बहुमूल्य सुझावों एवं लेख के छपने की अनुमति प्रदान करने के लिए लेखक अन्तरिक्ष उपयोग केन्द्र अहमदाबाद के निदेशक प्रो० चिटनिस के आभारी हैं।

निर्देश

1. ओ०पी०एन० कल्ला इत्यादि "Satellite Conferencing-Need For Indian Environment" Presented at IETE Symposium at Ahmedabad in August 1980.
2. जान, बैरिंगटन, "Teleconferencing HBO Style" Satellite Communication, October 1979.
3. "Satellite Communication Users Conference" Satellite Communication, August 79.



Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 26, No. 2, 1983

बहुपदों की एक नवीन कोटि

ए०एन० श्रीवास्तव तथा एस०एन० सिंह

गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जुलाई 3, 1978]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेखकों द्वारा सूत्रपात किये गये बहुपद $B_{kn}^{a,v,a}(x, p, s)$ को आगे बढ़ाया गया है।

Abstract

Operational derivation of generating relations of a new class of polynomials.
By A. N. Srivastava and S. N. Singh, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

This is the continuation of the study of the polynomials $B_{kn}^{a,v,a}(x, p, s)$ introduced by the authors. The polynomials $B_{kn}^{a,v,a}(x, p, s)$ are defined by

$$B_{kn}^{a,v,a}(x, p, s) = \frac{1}{n!} \cdot x^{-a-v-an} \exp(px^k) \cdot {}_aT_s^n(x^{a+v} \exp(-px^k)),$$

where

$${}_aT_s = x^a(s + xD), D \equiv d/dx.$$

In the present paper we establish two generating relations by operational technique. An explicit expression for these polynomials is also given. Several particular cases have been noticed.

प्रस्तावना

हाल ही में हमने^[3] सार्वकृतिक रूडिग के सूत्र की सहायता से बहुपदों की नवीन कोटि का सूत्रपात किया है।

$$B_{kn}^{\alpha, \nu, a}(x, p, s) = \frac{1}{n!} \cdot x^{-\alpha-\nu-an} \exp(p x^k) \cdot {}_aT_s(x^{\alpha+\nu} \exp(-p x^k)), \quad (1.1)$$

जहाँ

$${}_aT_s = x^a (s + xD), \quad D \equiv d/dx. \quad (1.2)$$

सार्वीकृत बहुपदी समुच्चय (1.1) अनेक गण्यमान बहुपदों तथा उनके अर्वाचीन सार्वीकरणों को एक विशिष्ट दशा के रूप में है। उदाहरणार्थ

$$B_n^{\alpha, 1, 1, 1}(x, 1, 0) = L_n^{(\alpha)}(x).$$

$$B_n^{\alpha, 0, a}(x, p, 0) = G_n^{(\alpha)}(x; k, p, a),$$

जहाँ $G_n^{(\alpha)}(x; k, p, a)$ श्रीवास्तव तथा सिंहल^[2] के बहुपद हैं।

पिछले प्रपत्रों में^[3,4] हमने इन बहुपदों के लिये क्रियात्मक सूत्र तथा जनक सम्बन्ध आदि प्राप्त किये हैं। प्रस्तुत प्रपत्र में हम क्रियात्मक विधि से इन बहुपदों के लिये दो जनक सम्बन्धों की स्थापना करेंगे।

2. सर्वप्रथम हम ${}_aT_s$ तथा $\delta \equiv xD$ संकारकों (Operators) के निम्नलिखित गुणों पर ध्यान देंगे।

$${}_aT_s^n(x^\alpha) = a^n \left(\frac{\alpha + s}{a} \right)_n x^{\alpha+an}, \quad (2.1)$$

जहाँ a यादृच्छिक है और n एक अनृत संख्या है।

$${}_aT_s^n(xuv) = x \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} {}_aT_s^{n-m}(v) \cdot {}_aT_1^m(u) \quad (2.2)$$

$${}_aT_s^n = x^{an} \prod_{j=0}^{n-1} (\delta + s + ja) \quad (2.3)$$

$$a^\delta f(x) = f(ax) \quad (2.4)$$

$$(1+t)^{-\delta-\alpha} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} (\delta+\alpha)_n f(x) \quad (2.5)$$

तथा

$$(1+t)^{-\delta-\sigma} = (1+t)^{-\delta} (1+t)^{-\sigma}. \quad (2.6)$$

हम (1.1) को निम्न प्रकार से लिखते हैं

$$B_n^a(x) = 1/n! x^{-a-v-an} \exp(px^k) {}_aT_s^n(x^{\alpha+v} \exp(-px^k)), \quad (2.7)$$

जहाँ तथा आगे भी सर्वत्र

$$B_n^a(x) = B_n^{a,p,a}(x, p, k, s). \quad (2.8)$$

स्पष्ट व्यंजक

कल्पना कीजिये कि

$$\begin{aligned} & {}_aT_s^n(x^{\alpha+v} \exp(-px^k)) \\ &= x \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} {}_aT_s^{n-m}(\exp(-px^k)) {}_aT_1^m(x^{\alpha+v-1}) \\ &= x^{\alpha+v+an} \exp(-px^k) \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \prod_{i=0}^{n-m-1} (s - kpx^k + ia) \prod_{j=0}^{m-1} (a + v + ja) \\ &= x^{\alpha+v+an} \exp(-px^k) \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^n \left(\frac{s - kpx^k}{a} \right)_{n-m} \cdot \left(\frac{a+v}{a} \right)_m. \end{aligned}$$

अतः हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$B_n^a(x) = \frac{a^n}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left(\frac{s - kpx^k}{a} \right)_{n-m} \left(\frac{a+v}{a} \right)_m \quad (2.9)$$

(2.9) में $v=s=0$, $a=p=k=1$ रखने तथा α को $\alpha+1$ से प्रतिस्थापित करने पर

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (\alpha+1)_m (-x)_{n-m}, \quad (2.10)$$

जो चक^[1] द्वारा दिया गया परिणाम है।

जनक सम्बन्ध

(2.3) तथा (2.6) से हमें बहुपद B_n^a का सक्रियात्मक निरूपण प्राप्त होता है जो निम्न प्रकार है

AP 3

$$B_n^\alpha(x) = 1/n! x^{-\alpha-\nu} \exp(px^k) \prod_{j=0}^{n-1} (\delta + s + ja) \cdot (x^{\alpha+\nu} \exp(-px^k)). \quad (2.11)$$

अब निम्न पर विचार करें

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(B_n^\alpha(x) t^n \right) &= x^{-\alpha-\nu} \exp(px^k) \sum_{n=0}^{\infty} t^n / n! \cdot \prod_{j=0}^{n-1} (\delta + s + ja) (x^{\alpha+\nu} \exp(-px^k)) \\ &= x^{-\alpha-\nu} \exp(px^k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} \left(\frac{\delta + s}{a} \right)_n (x^{\alpha+\nu} \exp(-px^k)) \\ &= x^{-\alpha-\nu} \exp(px^k) (1-at)^{-(\delta+s)/a} (x^{\alpha+\nu} \exp(-px^k)). \end{aligned}$$

अतः

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^\alpha(x) t^n = (1-at)^{-(\alpha+\nu+s)/a} \exp[px^k\{1-(1-at)^{-k/a}\}] \quad (2.12)$$

(2.12) में $s=0$, $a=p=k=\nu=1$ रखने पर हमें

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n = (1-t)^{-(\alpha+1)} \exp\left[\frac{-xt}{1-t}\right],$$

प्राप्त होता है जो लागेर बहुपदों के लिए ज्ञात जनक सम्बन्ध है। इसी प्रकार $B_n^\alpha(x)$ में प्राचलों को उपयुक्त मान प्रदान करते हुए (2.12) की कई विशिष्ट दशाएँ प्राप्त की जा सकती हैं।

अन्य जनक सम्बन्ध

(2.11) से हमें ज्ञात है कि

$$\begin{aligned} B_{n+m}^\alpha(x) &= \frac{1}{(n+m)!} x^{-\alpha-\nu} \exp(px^k) \prod_{j=0}^{n+m-1} (\delta + s + ja) \cdot (x^{\alpha+\nu} \exp(-px^k)). \\ &= \frac{x^{-\alpha-\nu}}{(n+m)!} \exp(px^k) \prod_{j=m}^{n+m-1} (\delta + s + ja) \prod_{j=0}^{m-1} (\delta + s + ja) \\ &\quad \cdot (x^{\alpha+\nu} \exp(-px^k)) \end{aligned}$$

$$= \frac{x^{-\alpha-\nu} \cdot m!}{(n+m)!} \exp (px^k) \prod_{j=m}^{n+m-1} (\delta+s+ja) (x^{\alpha+\nu} \exp (-px^k) \cdot B_m^{\alpha}(x)). \quad (2.13)$$

अतः

$$B_{n+m}^{\alpha}(x) = \frac{m!}{(n+m)!} x^{-\alpha-\nu} \exp (px^k) a^n \left(\frac{\delta+s}{a} + m \right)_n (x^{\alpha+\nu} \exp (-px^k) \cdot B_m^{\alpha}(x)). \quad (2.14)$$

अतः (2.14) की सहायता से

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} B_{n+m}^{\alpha}(x) t^n \\ &= x^{-\alpha-\nu} \exp (px^k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} \left(\frac{\delta+s}{a} + m \right)_n \cdot (x^{\alpha+\nu} \exp (-px^k) \cdot B_m^{\alpha}(x)). \\ &= x^{-\alpha-\nu} \exp (px^k) (1-at)^{-s/a-m} [(1-at)^{-1/a}]^{\delta} (x^{\alpha+\nu} \exp (-px^k) B_m^{\alpha}(x)). \\ &= \exp (px^k) (1-at)^{-s/a-m} (1-at)^{-(\alpha+\nu)/a} \\ & \quad \cdot \exp [-p\{x(1-at)^{-1/a}\}^k] B_m^{\alpha}(x(1-at)^{-1/a}). \end{aligned}$$

अतः हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है ।

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} B_{n+m}^{\alpha}(x) t^n \\ &= (1-at)^{-(\alpha+\nu+s+am)/a} \exp [px^k \{1-(1-at)^{-k/a}\}] \\ & \quad \cdot B_m^{\alpha}(x(1-at)^{-1/a}). \quad (2.15) \end{aligned}$$

निर्देश

1. चक, ए०एम०, Duke Math. J, 1956, 23, 45.
2. श्रीवास्तव, एच०एम० तथा सिंघल, जे०पी०, Ann. Mat. pura. appl, 1971, 40, 345.
3. श्रीवास्तव, ए०एन० तथा श्रीवास्तव, एस०एन०, (प्रेषित)
4. वही (प्रेषित)



Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 26, No. 2, 1983

वृत्ताकार झिल्ली का कम्पन

पी० सी० मुनोत तथा रेणू माथुर

गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त -- मार्च 16, 1982]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र एक पतली वृत्ताकार झिल्ली के अनुप्रस्थ कम्पनों के लिये विभिन्न रूपान्तरों का सम्प्रयोग करने पर उससे प्राप्य आंशिक अवकल समीकरण का हल प्राप्त करने के सम्बन्ध में विवेचना की गई है।

Abstract

On vibration of a circular membrane. By P. C. Munot and Renu Mathur,
Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

The present discussion embodies a solution to the differential equation arising in the discussion on the transverse vibrations of a thin circular membrane by applying various transforms like Fourier sine transform, finite Hankel transform and Laplace transform. It also includes in its special cases discussions on free and symmetrical vibrations of the membrane.

1. प्रस्तावना

भौतिक तथा इंजीनियरी के क्षेत्र में कम्पन सिद्धान्त के अध्ययन का अतीव महत्व रहा है। स्नेडान [2][3] ने कम्पनों से सम्बन्धित अनेक समस्याओं को हल करने का प्रयास किया है।

प्रस्तुत प्रपत्र में एक पतली वृत्ताकार झिल्ली के अनुप्रस्थ कम्पनों के लिए विभिन्न रूपान्तरों का सम्प्रयोग करने पर उससे प्राप्य आंशिक अवकल समीकरण का हल प्राप्त करने के सम्बन्ध में विवेचना की गई है। अनेक विशिष्ट दशाओं का भी उल्लेख किया गया है।

हमें निम्नलिखित समाकल रूपान्तरों की आवश्यकता पड़ेगी ।

हम $(z(r, \phi, t))$ के सान्त फूरियर साइन के रूपान्तर ^[2] को

$$z_s \equiv z_s(r, n, t) = \int_0^\pi z(r, \phi, t) \sin n\phi \, d\phi \quad (1.1)$$

द्वारा प्रदर्शित करेंगे ।

यदि $z(r, \phi, t)$ अन्तराल $(0, \pi)$ में डिरिक्लेट के प्रतिबन्धों की तुष्टि करे और इसका फूरियर साइन रूपान्तर (1.1) विद्यमान हो तो $(0, \pi)$ के प्रत्येक बिन्दु जिस पर फलन संतत है हमें (1.2) प्राप्त होगा ।

$$z(r, \phi, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} z_s(r, n, t) \sin \phi \quad (1.2)$$

हम $z(r, \phi, t)$ के सान्त हैकेल रूपान्तर को ^[2]

$$z \equiv z(\xi_1, n, t) = \int_0^a r z(r, \phi, t) j_\mu(r\xi_1) dr \quad (1.3)$$

के द्वारा अंकित करेंगे जहाँ ξ_i अबीजीय समीकरण

$$J_\mu(a\xi_i) = 0 \quad (1.4)$$

का मूल है ।

यदि $z(r, \phi, t)$ से $(0, a)$ अन्तराल में भी डिरिक्लेट के प्रतिबन्धों की तुष्टि हो और इस पराम में इसके सान्त हैकेल रूपान्तर (1.3) का अस्तित्व हो जहाँ $\xi_i c$ हल समुच्चय है (1.4) का तो $(0, a)$ के किसी भी बिन्दु पर जहाँ फलन $z(r, \phi, t)$ संतत है, हमें प्राप्त है

$$z(r, \phi, t) = \frac{2}{a^2} \sum_i z(\xi_i, \phi, t) J_\mu(r\xi_i) / [J'_\mu(a\xi_i)]^2 \quad (1.5)$$

जहाँ दक्षिण पक्ष को संकलन समीकरण (1.4) के समस्त धन मूलों को लिया जाता है ।

हमें दो अन्य फलों की आवश्यकता होगी :

$$\int_0^\pi \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sin nx \, dx = n \left[(-1)^{n+1} f(\pi) + f(0) \right] - n^2 f_s(n) \quad (1.6)$$

तथा

$$\int_0^a r \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\mu^2 f}{r^2} \right] J_\mu(r\xi_i) dr = -a\xi_i f(a) J'_\mu(a\xi_i) - \xi_i^2 f(\xi_i), \quad (1.7)$$

जहाँ ξ ; समीकरण (1.4) का मूल है।

2. इस अनुभाग में हम r त्रिज्या तथा σ घनत्व वाली वृत्ताकार झिल्ली के अनुप्रस्थ कम्पनों $z(r, \phi, t)$ के निश्चयन से सम्बन्धित अपनी मुख्य समस्या की विवेचन करेंगे, जबकि झिल्ली

- (i) $z=0$ तल पर एकसमान तनाव T तक खींची जाती है।
- (ii) $z=0$ तल की नार्मल दिशा में बाह्य दाब $p(r, \phi, t)$ के प्रभाव के अन्तर्गत है।
- (iii) कतिपय प्रारम्भिक भौतिक दिशाओं के अन्तर्गत विस्थापन तथा वेग ज्ञात हों।

यदि $z(r, \phi, t)$ झिल्ली का किसी t समय पर अनुप्रस्थ विस्थापन है, तो असमांग आंशिक अवकल समीकरण^[1]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{P(r, \phi, t)}{T} \quad (2.1)$$

जहाँ $c^2 = T/\sigma$.

निम्नलिखित प्रारम्भिक तथा सीमा प्रतिबन्धों के समुच्चय

$$z(a, \phi, t) = 0, \text{ क्योंकि } 0 \leq \phi \leq \pi, t > 0 \quad (2.2)$$

$$z(r, \phi, t) = 0, \text{ क्योंकि } \phi = 0 \text{ तथा } \phi = \pi, t < 0 \quad (2.3)$$

$$z(r, \phi, 0) = f(r, \phi), \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [z(r, \phi, t)] = g(r, \phi), \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.5)$$

$$0 \leq \phi \leq \pi, t = 0,$$

के अन्तर्गत हम यह दिखावेंगे कि आंशिक अवकल समीकरण (2.1) का हल

$$z(r, \phi, t) = \frac{4}{\pi a^2} \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(r \xi_i)}{\{J'_n(a \xi_i)\}^2} \sin n\phi.$$

$$\left[\bar{f}_s(\xi_i, n) \cos(c \xi_i t) + \frac{1}{c \xi_i} \bar{g}_s(\xi_i, n) \sin(c \xi_i t) + \frac{1}{\sigma c \xi_i} \int_0^t P_s(\tau) \sin\{c \xi_i (t - \tau)\} d\tau \right] \quad (2.6)$$

है जहाँ i के ति संकलन समीकरण $J_n(a\xi_i)=0$ के समस्त धन मूलों से होकर विस्तीर्ण है।

उपपत्ति

(2.1) के दोनों पक्षों में $\sin n\phi$ से गुणा करने और तब (1.1) तथा (2.3) के अनुसार 0 से ∞ तक की सीमाओं में ϕ के प्रति समाकलन करने पर हमें तुरन्त (2.7) प्राप्त होता है

$$\frac{\partial^2 \bar{z}_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{z}_s}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \bar{z}_s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{z}_s}{\partial t^2} - \frac{P_s(r, n, t)}{T} \quad (2.7)$$

अब (2.7) के दोनों पक्षों का (1.7) तथा (2.2) के समुचित सम्प्रयोग से सान्त हैकेल परिवर्तन (1.3) निकालने पर इससे

$$\frac{d^2 \bar{z}_s}{dt^2} + c^2 \xi_i^2 \bar{z}_s = \frac{1}{\sigma} P_s(\xi_i, n, t), \quad (2.8)$$

प्राप्त होता है जो और आगे लाप्लास रूपान्तर के (2.4) तथा (2.5) को सम्प्रयुक्त करते हुए प्रयोग किये जाने पर निम्नलिखित में समानीत हो जाता है

$$q^2 L(\bar{z}_s) - q \bar{f}_s(\xi_i, n) - \bar{g}_s(\xi_i, n) + c^2 \xi_i^2 L(\bar{z}_s) = \frac{1}{\sigma} L(\bar{P}_s) \quad (2.9)$$

जहाँ
$$L(f) = \int_0^\infty e^{-qt} f dt.$$

(2.9) में व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर को व्यवहृत करने तथा फिर संवलन प्रमेय का उपयोग करने पर

$$\begin{aligned} \bar{z}_s(\xi_i, n, t) = & \bar{f}_s(\xi_i, n) \cos(c\xi_i t) + \frac{1}{(c\xi_i)} \bar{g}_s(\xi_i, n) \sin(c\xi_i t) \\ & + \frac{1}{(c\xi_i)} \int_0^t \bar{P}_s(\tau) \sin\{c\xi_i(t-\tau)\} d\tau \end{aligned}$$

अब विलोमन सूत्र (1.2) तथा (1.5) की सहायता से परिणाम (2.6) प्राप्त होता है।

3. विशिष्ट दशायें

(i) माना $P(r, \phi, t) = 0$ अर्थात् भिल्ली के कम्पनों को स्वतन्त्र कम्पना होता चाहिये तब उन्हें समय t पर निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$z(r, \phi, t) = \frac{4}{\pi a^2} \sum_i \sum_n \frac{J_n(r\xi_i)}{\{J'_n(a\xi_i)\}^2} \left[\bar{f}_s(\xi_i, n) \cos(\xi_i t) + \frac{1}{c\xi_i} \bar{g}_s(\xi_i, n) \sin(c\xi_i t) \right] \quad (3.1)$$

(ii) यदि वृत्ताकार झिल्ली में संमित मुक्त कम्पन हो तो z मात्र r तथा t का फलन होता है अर्थात् यह ϕ से स्वतन्त्र होता है। अतः फलन के $\frac{\partial}{\partial \phi}$ को शून्य तुल्य रखने पर तथा (2.4) और (2.5) प्रतिबन्धों के स्थान पर क्रमशः $z(r, t) = f(r), t = 0$ तथा $\frac{\partial}{\partial t} z(r, t) = g(r), t = 0$ रखने पर हल (2.6) एक ज्ञात फल [2] में समानीत हो जाता है।

(iii) अन्त में, यदि हम झिल्ली को प्रारम्भिक स्थिति $z = 0$ पर एकसमान वेग $\frac{\partial z}{\partial t} = 1$ से गति दिये जाने पर विचार करें तो इसका विस्थापन

$$z(r, t) = \frac{2}{ac} \sum_i \frac{\sin(c\xi_i t)}{\xi_i^2 [J_1(a\xi_i)]^2} J_0(r\xi_i), \quad (3.2)$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ ξ_i मूल है समीकरण $J_0(a\xi_i) = 0$ का।

निर्देश

1. पाइप्स, एल० ए०, Applied Mathematics for Engineers and Physicists, मैकग्राहिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क, 1958.
2. स्नेडान, आई० एन० Fourier Transforms, मैकग्राहिल बुक कम्पनी न्यूयार्क 1951
3. वही, The Use of Integral Transforms, मैकग्राहिल बुक कम्पनी न्यूयार्क, 1972



दो चरों वाले लागेर बहुपदों के लिए आवर्तन सम्बन्ध

राजेन्द्र नाथ जैन तथा महेश दुबे

गणित विभाग, होल्कर विज्ञान महाविद्यालय, इन्दौर

[प्राप्त—जुलाई 30, 1982]

सारांश

प्रस्तुत पत्र का उद्देश्य दो चरों वाले लागेर बहुपदों के लिए नवीन आवर्त सम्बन्ध प्राप्त करना है।

Abstract

Recurrence relations for Laguerre polynomials of two variables. By Rajendra Nath Jain and Mahesh Dube, Department of Mathematics, Holkar Science College, Indore.

The object of this paper is to obtain new recurrence relations for the Laguerre polynomials of two variables.

1. दो चरों वाले लागेर बहुपदों को हम, हम्बर्ट के संगामी हाइपरज्यामितीय फलन के रूप में, निम्नप्रकार से परिभाषित कर सकते हैं।

$$\psi_2(-n, 1+a, 1+\beta; x, y) = \frac{(n!)^2}{(1+x)_n (1+\beta)_n} L_n^{a, \beta}(x, y) \quad (1.1)$$

(देखें [1, 3])

ये बहुपद निम्न अवकल आवर्ती संबंध संतुष्ट करते हैं

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) = n L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) - \frac{(n+n)(\beta+n)}{n} L_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x, y) \quad (1.2)$$

(देखें [3])

प्रस्तुत शोधपत्र में हम (1.2) को स्वतंत्र विधि से सिद्ध करते हुए निम्नलिखित आवर्तन-सम्बन्ध प्राप्त करेंगे—

$${}_n L_n^{(1+\alpha, \beta)}(x, y) - (\beta + n) L_{n-1}^{(1+\alpha, \beta)}(x, y) = L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) - y L_n^{(1+\alpha, 1+\beta)}(x, y) \quad (1.3)$$

तथा

$$\begin{aligned} {}_n L_n^{(\alpha, 1+\beta)}(x, y) - (\alpha + n) L_{n-1}^{(\alpha, 1+\beta)}(x, y) &= {}_n L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) \\ &\quad - x L_{n-1}^{(1+\alpha, 1+\beta)}(x, y) \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. हम्बर्ट के संगामी फलन की परिभाषा का उपयोग करते हुए (1.1) को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है

$$L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) = \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{(n!)^2} \sum_{r, s=0}^{r+s \leq n} \frac{(-n)_{r+s}}{r! s!} \frac{x^r y^s}{(1+\alpha)_r (1+\beta)_s} \quad (2.1)$$

$$\text{यदि } D_x = \frac{\partial}{\partial x} \text{ और } D_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

तो

$$\begin{aligned} x D_x L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) &= \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{(n!)^2} \sum_{r, s=0}^{r+s \leq n} \frac{(-n)_{r+s}}{r! s!} \frac{r x^r y^s}{(1+\alpha)_r (1+\beta)_s} \\ &= \frac{(\alpha)_{n+1} (1+\beta)_n}{(n!)^2} \sum_{r, s=0}^{r+s \leq n} \frac{(-n)_{r+s}}{r! s!} \frac{r x^r y^s}{(\alpha)_r (1+\beta)_s} - \alpha L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) \\ &= (\alpha + n) L_n^{(\alpha-1, \beta)}(x, y) - \alpha L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

इसी प्रकार

$$y D_y L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) = (\beta + n) L_n^{(\alpha, \beta-1)}(x, y) - \beta L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) \quad (2.3)$$

इन दोनों सम्बन्धों से प्राप्त होता है

$$(1.3) \quad \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) = (\alpha + n) L_n^{(\alpha-1, \beta)}(x, y) + (\beta + n) L_n^{(\alpha, \beta-1)}(x, y) - (\alpha + \beta) L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y)$$

जिसे सरल करने पर (1.2) प्राप्त होता है।

3. (2.1) के x के सापेक्ष आंशिक अवकलन से हम प्राप्त करते हैं

$$(1.4) \quad D_x L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) = \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{(n!)^2} \sum_{r,s=0}^{r+s \leq n} \frac{(-n)_{r+s} r x^{r-1} y^s}{r! s! (1+\alpha)_r (1+\beta)_s}$$

$$= -\frac{(2+\alpha)_{n-1} (1+\beta)_{n-1}}{\{(n-1)!\}^2} \cdot \frac{\beta+n}{n} \cdot \sum_{r,s=0}^{r+s \leq n-1} \frac{(-n+1)_{r+s} x^r y^s}{r! s! (2+\alpha)_r (1+\beta)_s}$$

$$(2.1) \quad = -\frac{\beta+n}{n} L_{n-1}^{(1+\alpha, \beta)}(x, y) \quad (3.1)$$

इसी प्रकार y के सापेक्ष आंशिक अवकलन से

$$D_y L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) = -\frac{\alpha+n}{n} L_{n-1}^{(\alpha, 1+\beta)}(x, y) \quad (3.2)$$

प्राप्त होता है।

अतः

$$(2.2) \quad n L_n^{(1+\alpha, \beta)}(x, y) + n D_x L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) = n \frac{(2+\alpha)_n (1+\beta)_n}{(n!)^2} \sum_{r,s=0}^{r+s \leq n} \frac{(-n)_{r+s} x^r y^s}{r! s! (2+\alpha)_r (1+\beta)_s}$$

$$- (\beta+n) \frac{(2+\alpha)_{n-1} (1+\beta)_{n-1}}{\{(n-1)!\}^2} \sum_{r,s=0}^{r+s \leq n-1} \frac{(-n)_{r+s} x^r y^s}{r! s! (2+\alpha)_r (1+\beta)_s}$$

$$(2.3) \quad = -\frac{(2+\alpha)_n (1+\beta)_n}{\{(n-1)!\}^2} \sum_{r,s=0}^{r+s \leq n-1} \left[\frac{(-n+1)_{r+s-1} x^r y^s}{r! s! (2+\alpha)_{r-1} (1+\beta)_s} + \frac{(-n+1)_{r+s-1} x^r y^s}{r! (s-1)! (2+\alpha)_r (1+\beta)_s} \right] + T \quad (3.3)$$

जबकि

$$T = \frac{(2+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n! (n-1)!} \sum_{r,s=0}^{r+s=n} \frac{(-n)_{r+s} x^r y^s}{r! s! (2+\alpha)_r (1+\beta)_s} \quad (3.4)$$

(3.3) को सरल करने पर

$$\begin{aligned} & nL_n^{(1+\alpha, \beta)}(x, y) + nD_x L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) \\ &= \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n! (n-1)!} \sum_{r,s=0}^{r+s=n-1} \frac{(-n)_{r+s} x^r y^s}{r! s! (1+\alpha)_r (1+\beta)_s} - \frac{(2+\alpha)_{n-1} (2+\beta)_{n-1}}{\{(n-1)!\}^2} \\ & \quad \sum_{r,s=0}^{r+s=n-2} \frac{(-n+1)_{r+s} x^r y^{s+1}}{r! s! (2+\alpha)_r (2+\beta)_s} + T \\ &= nL_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) - T_1 - [y L_{n-1}^{(1+\alpha, 1+\beta)}(x, y) - T_2] + T \end{aligned} \quad (3.5)$$

जबकि

$$T_1 = \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n! (n-1)!} \sum_{r+s=n} \frac{(-n)_{r+s} x^r y^s}{r! s! (1+\alpha)_r (1+\beta)_s} \quad (3.6)$$

और

$$T_2 = \frac{(2+\alpha)_{n-1} (2+\beta)_{n-1}}{\{(n-1)!\}^2} \sum_{r+s=n-1} \frac{(-n+1)_{r+s} x^r y^s}{r! s! (2+\alpha)_r (2+\beta)_s} \quad (3.7)$$

अभीष्ट पुनरावृत्ति सम्बन्ध को प्राप्त करने के लिए हम (3.3) को सरल करेंगे। विशेष कर हम T का मान ज्ञात करेंगे।

$$\begin{aligned} T - T_1 &= \frac{(2+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n! (n-1)!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_n x^{n-k} y^k}{(n-k)! k! (2+\alpha)_{n-k} (1+\beta)_k} \\ & \quad - \frac{(1+\alpha)_n (1+\beta)_n}{n! (n-1)!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_n x^{n-k} y^k}{(n-k)! k! (1+\alpha)_{n-k} (1+\beta)_k} \\ &= \frac{(2+\alpha)_{n-1} (1+\beta)_n}{n! (n-1)!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_n x^{n-k} y^k}{(n-k)! (k-1)! (2+\alpha)_{n-k} (2+\beta)_k} \\ &= - \frac{(2+\alpha)_{n-1} (2+\beta)_{n-1}}{\{(n-1)!\}^2} \sum_{k=0}^n \frac{(-n+1)_k x^{n-k-1} y^{k+1}}{(n-k-1)! k! (2+\alpha)_{n-k-1} (2+\beta)_k} = -T_2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\text{अतः } T - T_1 + T_2 = 0$$

इसलिए

$$nL_n^{(1+\alpha, \beta)}(x, y) + nD_x L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) = nL_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) - yL_{n-1}^{(1+\alpha, 1+\beta)}(x, y) \quad (3.9)$$

इसी प्रकार

$$nL_n^{(\alpha, 1+\beta)}(x, y) + nD_y L_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) = nL_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) - xL_{n-1}^{(1+\alpha, 1+\beta)}(x, y) \quad (3.10)$$

(3.9) को हम निम्न प्रकार से भी व्यक्त कर सकते हैं, (3.3) के उपयोग से —

$$nL_n^{(1+\alpha, \beta)}(x, y) - (\beta + n)L_{n-1}^{(1+\alpha, \beta)} = nL_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) - yL_{n-1}^{(1+\alpha, 1+\beta)}(x, y) \quad (3.11)$$

और (3.10) को (3.2) की सहायता से

$$nL_n^{(\alpha, 1+\beta)}(x, y) - (\alpha + n)L_{n-1}^{(\alpha, 1+\beta)}(x, y) = nL_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) - xL_{n-1}^{(1+\alpha, 1+\beta)}(x, y) \quad (3.12)$$

लिखा जा सकता है

(3.11) में $y = \beta = 0$ रखने पर

$$L_n^{(1+\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(1+\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$$

प्राप्त होता है। इसे हम लिख सकते हैं

$$D_x L_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(1+\alpha)}(x)$$

जो (3.11) की सत्यता को दर्शाता है। उसी प्रकार (3.12) में $x = \alpha = 0$ को रखने पर उसकी सत्यता स्थापित की जा सकती है।

निर्देश

1. ऐपेल, पी० तथा कैम्प द फेरी, जे०, Functions Hypergeometriques at Hyper Spheriques, पारी, 1926
2. डिटिकन्, वी० ए० तथा प्रूडनीकोव्ह, ए० पी०, Operational Calculus in two Variables and its Applications. अंग्रेजी अनुवाद, पर्गमन प्रेस
3. जैन, आर० एन० तथा द्वे, सी० के०, Simon Stevin (72-73) pp 129-139
4. रेनविले, अलं, डी०, Special Functions.



यूरेनिल-3-मेथिल-1-फेनिल-4-(प्रतिस्थापित सल्फोनैमिडो-बेन्जीन-ऐजो) पिरैजोल-5-ओन की प्रतिजीवाण्विक सक्रियता

कमल० के० चतुर्वेदी

रसायन विभाग, होल्कर साइंस कालेज, इन्दौर

[प्राप्त—मार्च 26, 1981]

सारांश

साहित्य के सामान्य प्रेक्षण से प्रदर्शित होता है कि सल्फोनैमाइडो के धातु संकर शक्त प्रति-जीवाण्विक होते हैं। कुछ प्रकरणों में ये जनक सल्फा औषधियों से अधिक शक्त होते हैं^[1, 2, 3]। 2-पिरैजोलीन-5-ओन व्युत्पन्नों को प्रभावी रोगाणु-नाशी^[4], प्रतिशूक्ष्मजीवी^[5], प्रतिविकारक^[6], प्रतिमूत्रल^[7], वेदनाहारी तथा ज्वरनाशी^[8], क्वकनाशी^[9], प्रतिहिस्टामिनी^[10], प्रतियक्ष्मा^[11, 12], आमवातरोगी^[13] तथा प्रतिजीवाण्विक^[14] होने का दावा किया गया है।

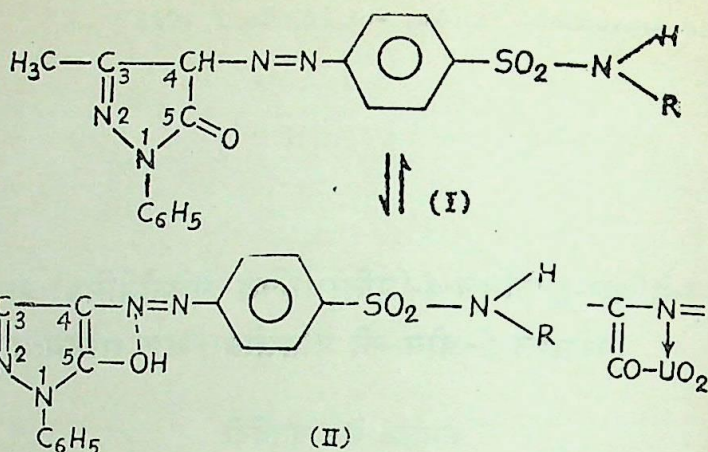
2-पिरैजोलीन-5-ओन^[15] तथा इसके प्रतिस्थापित व्युत्पन्नों के निर्माण का वर्णन किया गया है^[16-18]। इसके पहले^[19] हमने 3-मेथिल-1-फेनिल-4-(प्रतिस्थापित सल्फोनैमिडो-बेन्जीन-ऐजो)-पिरैजोलीन-5-ओन (संरचना I) के संश्लेषण का वर्णन किया है। यहाँ हम यूरेनिल संकरण तथा 5-हाइड्रॉक्सी 3-मेथिल-1-फेनिल-4-(प्रतिस्थापित सल्फोनैमिडो-बेन्जीन) पिरैजोल के अंतःपात्रे प्रभाव को स्पष्ट करने के लिए एक वैकल्पिक संरचना (II) प्रस्तावित करते हैं।

Abstract

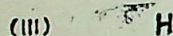
Antibacterial activity of uranyl-3-methyl-1-phenyl-4-(substituted sulphonamido-azo) pyrazol-5-one. By Kamal K. Chaturvedi, Department of Chemistry, Holkar Science College, Indore.

We propose an alternative structure (II) to explain uranyl complexation and in-vitro efficacy of 5-hydroxy-3methyl-1phenyl-4-(substituted sulphonamido benzene-azo) pyrazole.

AP 5



जहाँ R=



यूरेनिल 3-मेथिल 1-फेनिल 4-(p-सल्फोनैमिडो बेन्जीन-ऐजो)-
पिरैजोल 5-ओन

(IV)

यूरेनिल 3-मेथिल 1-फेनिल 4-(p-2' पिरिमिडिल सल्फोनैमिडो
बेन्जीन-ऐजो) पिरैजोल 5-ओन

(V)

यूरेनिल 3-मेथिल 1-फेनिल 4-(p-4', 6' डाइ मेथिल 2'-पिरिमिडिल
सल्फोनैमिडो- बेन्जीन ऐजो) पिरैजोल 5-ओन

(VI)

यूरेनिल 3-मेथिल 1-फेनिल 4-(p-2', 4' डाइमेथॉक्सी-6' पिरिमिडिल
सल्फोनैमिडो बेन्जीन ऐजो) पिरैजोल 5-ओन

(VII)

यूरेनिल 3-मेथिल 1-फेनिल 4-(p-2'-सल्फाथियाजोलिल सल्फो
नैमिडो बेन्जीन ऐजो) पिरैजोल 5-ओन

पिरैजोलोन नाभिक अर्थात् 3-मेथिल 1-फेनिल 4-(प्रतिस्थापित सल्फोनैमिडो वेन्जीन ऐजो) पिरैजोलोन 5-ओन, संरचना (I) तथा 5-हाइड्रॉक्सी 3-मेथिल फेनिल 4-(प्रतिस्थापित सल्फोनैमिडो वेन्जीन ऐजो) पिरैजोल, संरचना (II) का कीटो ईनाल चलावयवी रूप TLC तथा अवरक्त अवशोषण द्वारा स्थापित किया गया। अवरक्त स्पेक्ट्रम 1690cm^{-1} पर एक लाक्षणिक कार्बोनिल समूह तथा 3500 और 2850cm^{-1} पर एक ईनालीय चौड़ा पट्ट भी प्रदर्शित करता है। प्रस्तुत प्रकरण में पट्ट का चौड़ापन अणु में हाइड्रोजन बंध के कारण हो सकता है। 1620cm^{-1} तथा 1565cm^{-1} पर प्राप्त पट्ट क्रमशः विषम-चक्रीय वलय तथा $-\text{N}=\text{N}-$ समूह के कारण प्राप्त हुए।

प्रयोगात्मक

प्रामाणिक संधि (Joints) वाले कांच उपकरण तथा सभी रसायन अभिकर्मक श्रेणी के प्रयोग किये गये। पूर्ववर्णित विधि द्वारा लिगैण्ड बनाये गये [19] यौगिकों की समांगता तथा शुद्धता की जाँच TLC द्वारा की गई और अवरक्त स्पेक्ट्रम पार्किन एल्मर 621 ग्रेटिंग आई० आर० स्पेक्ट्रोफोटोमीटर पर KBr टिकियों में अभिलेखित किये गये।

थोड़ी अधिकता में गर्म एथेनालीय विलयन में धात्विक लवण विलयन (यूरेनिल ऐसीटेट) को 1:1 धातु लिगैण्ड अनुपात में बूंद-बूंद करके तथा लगातार विलोडन के साथ मिलाया गया और 1/2 घंटे तक जल ऊष्मक पर पश्चवाहित करके रात भर ठंडा किया गया। उत्पाद को स्यंदित किया गया और पहले गर्म पानी से और फिर गर्म मेथेनाल से खूब धोया गया। संकर को पुनः क्रिस्टलित करके सुखाया गया। प्राप्त लब्धि कम थी (50-60%)।

सभी संकर यथेष्ट स्थायी रंगीन ठोस हैं और किसी भी परिवर्तन के बिना रखे जा सकते हैं। इन संकरों की शुद्धता की जाँच TLC द्वारा की गई। उबलते हुए क्लोरोफार्म में अनुमान ज्ञात करने पर ये संकर एकलक पाये गये। संकरों के अवरक्त अध्ययन से भी इस कथन को समर्थन मिला। मानक विधियों द्वारा ज्ञात किये गये वैश्लेषिक परिणाम (सारणी 1) ने प्रदर्शित किया कि इन संकरों की स्टोइ-कियोमीट्री 1:1 है।

प्रतिजीवाण्विक अध्ययन

3-मेथिल 1-फेनिल -पिरैजोलोन (5) तथा 3-मेथिल 1-फेनिल 4-(प्रतिस्थापित सल्फोनैमिडो वेन्जीन ऐजो) पिरैजोन 5-ओन को 50% ऐल्कोहॉल तथा जल v/v में धोला गया। प्रतिजीवाण्विक अध्ययनों के लिए फिल्टर पत्र डिस्क विसरण प्लेट विधि अपनायी गई। 5 मि०मी० व्यास वाली ब्यूटमैन नं० 1 फिल्टर पत्र की डिस्क को संबंधित नमूनों के विलयनों में डुबोया गया, निस्सृत किया गया और माध्यम (5 मि०मी० ऊँचाई) के रूप में पोषक अगर (OXACID) की बनी स्पोर बीजित प्लेटों पर रखा गया।

साथ ही एक नियंत्रित परीक्षण चलाया गया जिसमें उसी पेट्रीडिश के बीच में एक खाली डिस्क रखी गई जिसमें परीक्षण के लिए नमूने के विलयन रखे गये थे। पेट्रीडिश को $37.5 \pm 1^\circ\text{C}$ पर

उद्भावित करके 24 घंटे बाद परीक्षण जीव के प्रति संदमन प्रभाव नोट किया गया। इसके लिए संदमन पर व्यक्त क्षेत्रों को मापा गया। संदमन के अभिलेखित क्षेत्रों की तुलना मानकों द्वारा उत्पन्न क्षेत्रों से की गई। लिगेण्ड तथा धातु संकरों (कोष्ठकों में) के संदमन के अभिलेखित क्षेत्रों को सारणी 2 में दिखाया गया है।

परिणाम तथा विवेचना

लिगेण्ड तथा धातु संकर दोनों ही यौगिकों के तत्वों के विश्लेषण संतोषजनक पाये गये। सभी संकरों में धातु-लिगेण्ड अनुपात 1:1 पाया गया। संकरों की लव्धि निम्न पाई गई।

पिरैजोलीन नाभिक के कीटो-ईनाल चलावयवी रूप की स्थापना अवरक्त स्पेक्ट्रम द्वारा की गई जो 1690cm^{-1} पर लाक्षणिक कार्बोनिक समूह अवशोषण तथा 3500 और 2850cm^{-1} पर ईनालीय चौड़ा पट्ट भी प्रदर्शित करता है। अन्य महत्वपूर्ण निर्धारणीय शीर्ष 780cm^{-1} पर ऐरोमैटिक वलय के कारण, 1613cm^{-1} पर ($>\text{C}=\text{N}$) पर चक्रीय के कारण तथा 1560cm^{-1} पर विषय चक्रीय पंचसदस्यीय 2-पिरैजोलीन 5-ओन के कारण थे ^[20]। $>\text{C}=\text{O}$ समूह ($1700\text{-}1680\text{cm}^{-1}$) तथा $-\text{N}=\text{N}-$ (1570cm^{-1}) की आवृत्तियों का क्रमशः 1630cm^{-1} तथा 1545cm^{-1} निम्न क्षेत्र की ओर विस्थापन इन समूहों का संकरण में भाग लेना प्रदर्शित करता है।

सारणी 1

क्रम संख्या	अणु-सूत्र	रंग	गलनांक	प्राप्त			वांछित		
				N	S	UO ₂	N	S	UO ₂
III	$\text{C}_{16}\text{H}_{14}\text{N}_5\text{SO}_3\text{UO}_2$	RO	253	11.00	5.00	42.90	11.17	5.11	42.98
IV	$\text{C}_{20}\text{H}_{16}\text{N}_7\text{SO}_3\text{UO}_2$	O	247	14.00	5.00	38.00	13.91	4.54	38.36
V	$\text{C}_{20}\text{H}_{20}\text{N}_7\text{SO}_3\text{UO}_2$	ODU	270	13.80	4.78	38.00	13.83	4.51	38.15
VI	$\text{C}_{22}\text{H}_{20}\text{N}_7\text{SO}_5\text{UO}_2$	LO	261	12.98	4.00	35.00	12.82	4.18	35.35
VII	$\text{C}_{19}\text{H}_{15}\text{N}_6\text{S}_2\text{O}_3\text{UO}_2$	DO	278	11.96	9.00	38.00	11.84	9.02	38.09

R=Red, (लाल) O=Orange, (नारंगी)

L=Light, (हल्का) D=Dark, (गहरा)

Du=Dul, l (भद्दा)

सारणी 2

जीव	100ppm पर अंकुरण के संदमन की प्रतिशतता					S
	III	IV	V	VI	VII	
एशेरिशिया कोलाई	20 (30)	30 (35)	20 (30)	23 (28)	—	40
विब्रियो कोलेरी	20 (30)	—	24 (30)	— (20)	23	41
एकरोमोबैक्टर हाइड्रोफिलिस	20 (36)	35 (40)	22 (30)	—	—	30
प्रोटियस मिरेबिलिस	24 (32)	—	—	23 (28)	22 (30)	36
क्लेबिसिएला न्यूमोनी	22 (36)	—	20 (24)	—	25 (32)	43
सालमोनेला टाइफी	—	—	21 (28)	22 (26)	—	42
प्लेसियोमोनास शिगेलेडिस	25 (30)	40 (50)	24 (34)	20 (32)	29 (36)	40
प्रोटियस वल्गैरिस	22 (30)	—	25 (30)	26 (30)	—	43
सिट्रोबैक्टर	22 (28)	40 (42)	20 (38)	22 (30)	20 (38)	24
C-ओविस	20 (30)	44 (50)	22 (34)	—	25 (30)	40

S=मानक 3-मेथिल 1-फेनिल -4(सल्फेनिलऐमिडो ऐज़ो) पिरैज़ोल 5-ओन कोष्ठकों में दिये गये परिणाम धातु संकरों के हैं ।

UO_2 (II) संकरों के अवरक्त स्पेक्ट्रम 830 cm^{-1} तथा 915 cm^{-1} पर दो पट्ट प्रदर्शित करते हैं जिनका निर्धारण क्रमशः रैखिक $\text{O}-\text{U}-\text{O}$ के γ asy के रूप में किया जा सकता है।

सारणी 2 का आलोचनात्मक प्रेक्षण प्रदर्शित करता है कि W/W के विचार के अनुसार एशेरेशिया कोलाई के प्रति धातु संकर (III, IV, V तथा VI) संगत अकेले लिगेण्ड की तुलना में अधिक शक्त होते हैं। यह पिरिमिडिल समूह (V) में दो $-\text{CH}_3$ समूहों के कारण हो सकता है। विव्रियो कोलेरी के प्रति III तथा V अधिक शक्त होते हैं जब कि VII, ऋणात्मक होता है। ऐक्रोमोवैक्टर हाइड्रोफिलिस के साथ अकेले लिगेण्ड की तुलना में III, IV तथा V संकरों की शक्ति अधिक स्पष्ट होती है। प्रोटियस पिरैविलिस के प्रति केवल III, VI तथा VII संकरों में ही शक्ति पाई जाती है। क्लेविसएला न्यूमोनी में III, V तथा VII यौगिकों ने संदमन का अधिक बड़ा क्षेत्र प्रदर्शित किया। प्लेसियोमोनास शिगैलेडिस में संकरों के लिए संदमन का एक बड़ा क्षेत्र देखा जाता है जब कि सिट्रोवैक्टर में II, V, VI तथा VII के लिए घनात्मक तथा IV के लिए ऋणात्मक परिणाम स्पष्टतः लक्षित होते हैं। C-ओविस के प्रति III, IV V तथा VII घनात्मक परिणाम प्रदर्शित करते हैं। सालमोनैला टाइफी के प्रति भी अच्छे परिणाम नहीं पाये गये यद्यपि V तथा VI यौगिकों ने बड़ी हुई सक्रियता प्रदर्शित की। प्रोटियस वल्गैरिस के प्रति III, V तथा VI यौगिकों ने बड़ी हुई सक्रियता प्रदर्शित की।

W/W के विचार से समान प्रतिबंधों के अंतर्गत सम्पादित चार पाठ्यांकों के औसत परिणाम हैं। अतः अधिकांश प्रकरणों में केवल लिगेण्ड की तुलना में अधिक सक्रिय तथा शक्त पाये जाते हैं। सामान्यतः मेथॉक्सिल समूह के स्थान पर मेथिल समूह लेने पर शक्ति में वृद्धि होती है जबकि सल्फर प्रतिस्थापित पंन सदस्यीय वलय कम प्रभावी होते हैं।

निर्देश

1. चतुर्वेदी, कमल के० तथा सहयोगी, इण्डियन जर्न० फार्मेसी, 1975, 37, 85
2. चतुर्वेदी, कमल के० तथा जैन, पी०, Lab. Dev. J. of Sci and Tech., 1975, 13 (A), 138.
3. चतुर्वेदी, कमल के०, जैन, एन० के० तथा जैन, पी०, Hindustan Antibiotics Bulletin 1975, 18 (1-2), 40-41
4. ऐण्डर्सन, सी० एन०, U. S. Pat., 1938, 2, 107, 321; J. Amer. Chem. Soc., 1949, 71, 3105
5. जिराड, ए०, U. S. Pat, 1941 2, 256, 261; भागवत, पी० एन०, इण्डियन जर्न० फार्मेसी, 1968, 30, 125
6. विवरोगा, एम० आई० तथा मेयिन, पी० एच०, Excerpta med Sect. XIII, 1954, 8, 135; Chem. Abstr. 1955, 49, 13593

7. पेकोवास्की, वी० तथा हेलेसेक, बी०, *Casopis lekaru coeshygh*, 1956, **95**, 300; *Chem. Abstr.* 1956, **50**, 7006.
8. मैज, जे०, *Prezeflalinskie and Szurkea*, H. *Diss Pharm. Pharmacol.* 1966, **18**, 345; *Chem. Abstr.* 1967 1444 r
9. यूशी तथा मत्समुरा सी०, *Yakugaku Zashchi* 1967, **87**, 38 *Chem Abstr*, 1967 11452h
10. एल्बर्टी, जे० ई०, हुकई, लैटिनेव पी० तथा माइरी, जे०, *Alzein Forsch* 1967, **17**, 914; *Chem Abstr.* 1967, **67**, 43734.
11. पटेल, एम०आर०, पल्लारे, आर०ए० तथा डालीवाल, सी०बी०, *Indian J. Microbial* 1966, **6**, 35; *Chem. Abstr.* 1998, **68**, 37917.
12. डेनेको, ओ० तथा नानेजोवा, एस०, *Collect Exch. Chem. Commun*, 1968, **33**, 425
13. डोहम, एम० तथा डीड्रिच, पी०, *U. S. Pat.* 1944, **2**, 345, 385.
14. सहायिया, जी० एस० तथा शर्मा, एच० आर०, *Def Sc. J.*, 1972, **22**, 135, तथा *I. C. S.* 1974, **51**, 254.
15. केयोरी, एल०, *Ber.* 1883, **16**, 2597.
16. विले, आर० एन० तथा विले, पी०, *Heterocyclic Compounds E. D. P.*, 1954, **14**.
17. गर्ग, एच० जी० तथा प्रकाश, सी० जे०, *Med. Chcm.* 1971, **14**, 175.
18. गर्ग, एच० जी०, तथा प्रकाश, सी० जे०, *Pharma. Sc.* 1971, **60**, 323.
19. अग्रवाल, बी०के० तथा चतुर्वेदी, के० के०, *Chemical and Petrochemicals J.*, 1980 **7**, XI (10)
20. सिंह, सी० पी० तथा ओझा, ए० सी०, *J. I. C. S.*, 1980, **57**, 1173.
21. मिक, एस० तथा केकीरो जेड०, *Zniki Chem.*, 1958, **32**, 1427.
22. जोन्स, एल० एच०, *Spectrochim Acta*, 1958, **10** 369; **11**, 409.
23. मेग्रिन, एस० पी० तथा स्मिथ, जे० के, *J. Mol. Spectroscopy*, 1961, **6**, 188.

माइजर के G-फलन वाले सान्त समाकल

(श्रीमती) पी०के० मिट्टल

गवर्नमेन्ट कालेज, अजमेर

[प्राप्त—अक्टूबर 15, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में माइजर के G-फलन वाले चार नवीन सान्त समाकलों का मान ज्ञात किया गया है।

Abstract

On finite integrals involving Meijer's G-function. By (Mrs) P. K. Mittal, Government College, Ajmer.

In the present paper we have evaluated four new finite integrals involving Meijer's G-function. On specializing the Jacobi polynomial, Bessel function, Hypergeometric function etc., can be obtained as special cases of our main results. Certain results recently obtained by Goyal [5], Bhonsle [1] etc., also follow as particular cases of our main findings.

1. प्रस्तावना

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य निम्नलिखित चार समाकलों को स्थापित करना है।

$$\int_0^1 x^\eta (1-x)^\beta F_4 [p, \delta; 1+\alpha, 1+\beta; -xt, t(1-x)] G_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \middle| zx^\sigma \right]_{ax} \\ = \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\sigma)^{\beta+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\rho, r) (\delta, r) (-t)^r}{(1+\alpha, r) r!} \\ \times G_{p+2\sigma, q+2\sigma}^{m, n+2\sigma} \left[\begin{matrix} \Delta(\sigma, -\eta), \Delta(\sigma, \alpha-\eta); (a_p) \\ (b_q), (\sigma, \alpha-\eta+r), \Delta(\sigma, -1-\beta-\eta-r) \end{matrix} \middle| z \right] \quad (1.1)$$

(1.1) में $F_4[x, y]$ से दो चरों वाली हाइपरज्यामितीय श्रेणी का संकेत होता है [4, p. 224];

$$G_{p,q}^{m,n} \left[x \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right]$$

से G -फलन [4, p. 207]; (a_p) से $a_1, a_2, \dots, a_p$; (a, n) से $a(a+1)\dots(a+n-1)$ (n धन संख्या है।)
 $\Delta(n, a)$ से $a/n, (a+1)/n, \dots, (a+n-1)/n$; (n एक धन संख्या है।)

समाकल (1.1) निम्नलिखित प्रतिबन्ध समुच्चयों के अन्तर्गत वैध है

$$(i) \quad 2(m+n) > (p+q), |\arg z| < \left(m+n - \frac{p+q}{2} \right) \pi, \operatorname{Re}(\beta) > -1,$$

$\operatorname{Re}(\eta + \sigma b_j + 1) > 0, (j=1, \dots, m) \mid |t| < 1, \sigma$ धन संख्या है।

$$(ii) \quad 2(m+n) \geq (p+q), |\arg z| \leq \left(m+n - \frac{p+q}{2} \right) \pi, \operatorname{Re}(\beta) > -1,$$

$\operatorname{Re}(\eta + \sigma b_j + 1) > 0, (j=1, \dots, m) \mid |t| < 1, \sigma$ धन संख्या है तथा

$$\operatorname{Re} \left[\sum_1^p (a_j) - \sum_1^q (b_j) + \frac{(p-q)(\eta+1)}{\sigma} \right] > \frac{1}{2} (p-q-1)$$

$$(iii) \quad p < q \text{ अथवा } p \leq q \text{ तथा } |z| < 1, \operatorname{Re}(\eta + \sigma b_j + 1) > 0$$

$(j=1, \dots, m) \operatorname{Re}(\beta) > -1 \mid |t| < 1, \sigma$ धन संख्या है।

$$\int_0^1 x^\eta (1-x)^\alpha [1 - (1-2x)t]^{-p} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}; \frac{4t^2 x(x-1)}{1-(1-2x)t^2} \\ \alpha+1 \end{matrix} \right]$$

$$\times G_{p,q}^{m,n} \left[zx^\sigma \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\sigma)^{\alpha+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(p, r) (-t)^r}{r!} G_{p+2\sigma, q+2\sigma}^{m, n+2\sigma} \left[z \left| \begin{matrix} \Delta(\sigma, -\eta), \Delta(\sigma, \alpha-\eta), (a_p) \\ (b_q), \Delta(\sigma, \alpha-\eta+r), \\ \Delta(\sigma, -1-\alpha-\eta-r) \end{matrix} \right. \right]$$

जिन प्रतिबन्ध समुच्चयों के अन्तर्गत समाकल (1.2) वैध है वे नीचे दिये जा रहे हैं

$$(i) \quad 2(m+n) > (p+q) \cdot |\arg z| < \left(m+n - \frac{p+q}{2}\right) \pi, \operatorname{Re}(a) > -1,$$

$\operatorname{Re}(\eta + \sigma b_j + 1) > 0 \quad (j=1, \dots, m), \sigma$ धन संख्या है।

$$(ii) \quad 2(m+n) \geq (p+q), |\arg z| \leq \left(m+n - \frac{p+q}{2}\right) \pi, \operatorname{Re}(a) > -1,$$

$\operatorname{Re}(\eta + \sigma b_j + 1) > 0 \quad (j=1, \dots, m), \sigma$ धन संख्या है तथा

$$\left[\sum_1^p (a_j) \quad \sum_1^q (b_j) + \frac{(p-q)(\eta+1)}{\sigma} \right] > \frac{1}{2} (p-q-1).$$

$$(iii) \quad p < q \text{ अथवा } p \leq q \text{ तथा } |z| < 1, \operatorname{Re}(\eta + \sigma b_j + 1) > 0$$

$(j=1, \dots, m), \operatorname{Re}(a) > -1, \sigma$ धन संख्या है

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\rho)^{-2\alpha-1} x^\eta (1-x)^\alpha \exp \left[\frac{-t(1-2x-t)}{\rho^2} \right] {}_0F_1 \left[\begin{matrix} - \\ a+1 \end{matrix} \middle| \frac{t^2(x-1)}{\rho^4} \right] \\ & \quad \times G_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \middle| zx^\sigma \right] dx \\ & = \frac{\Gamma(a+1)}{(\sigma)^{a+1}} \sum_{r=0}^{\infty} L_r^{(2a-1)} (1) (-t)^r G_{p+2q,q+2\sigma}^{m,n+2\sigma} \left[\begin{matrix} \Delta(\sigma, -\eta), \Delta(\sigma, a-\eta), (a_p) \\ (b_q), \Delta(\sigma, a-\eta+r) \\ \Delta(\sigma, -1-a-\eta-r) \end{matrix} \middle| z \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

जहाँ $L_r^{(a)}(x)$ लागेर बहुपद^[7] है; $\rho = [1-2(1-2x)t+t^2]^{1/2}$ तथा (1.2) में उल्लिखित प्रतिबन्ध समुच्चयों की तुष्टि होती है।

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{\eta-1} [1+(x-1)t]^{-a} (1-x)^{\alpha-\eta-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, \beta \\ p \end{matrix} \middle| \frac{xt}{1+(x-1)t} \right] \\ & \quad \times G_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \middle| zx^\sigma (1-x)^\sigma \right] dx \end{aligned}$$

$$= \frac{(1-t)^{p-a-\beta} (2\pi)^{1-\sigma} (\sigma)^{a-1}}{\Gamma(a)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(p-\beta, r) (\sigma t)^r}{(p, r) r!}$$

$$\times G_{p+2\sigma, q+2\sigma}^{m+2\sigma, n+\sigma} \left[z \left\{ \begin{array}{l} \Delta(\sigma, 1-\eta), (a_p), \Delta(\sigma, p-\eta) \\ \Delta(\sigma, a-\eta), \Delta(\sigma, a-\eta+r), (b_q) \end{array} \right\} \right] \quad (1.4)$$

जिन प्रतिबन्ध समुच्चयों के अन्तर्गत समाकल (1.4) वैध है वे नीचे दिये जा रहे हैं :

$$(i) \quad \operatorname{Re}(a) > \operatorname{Re}(\eta) > 0, \operatorname{Re}(p-a+r) > 0, \operatorname{Re}(p-a-\beta) > 0$$

$$\operatorname{Re}(\eta + \sigma b_j) > 0 \quad (j=1, \dots, m), \operatorname{Re}(a-\eta-\sigma a_j + \sigma) > 0$$

$$(j=1, \dots, n) \quad 2(m+n) > (p+q), |\arg z| < \left(m+n - \frac{p+q}{2}\right) \pi$$

σ धन संख्या है ।

$$(ii) \quad \operatorname{Re}(a) > \operatorname{Re}(\eta) > 0, \operatorname{Re}(p-a+r) > 0, \operatorname{Re}(p-a-\beta) > 0;$$

$$\operatorname{Re}(\eta + \sigma b_j) > 0, (j=1, \dots, m), \operatorname{Re}(a-\eta-\sigma a_j + \sigma) > 0,$$

$$(j=1, \dots, n), \sigma \text{ धन संख्या है } z(m+n) \geq (p+q) |\arg z| \leq \left(m+n - \frac{p+q}{2}\right) \pi$$

तथा

$$\operatorname{Re} \left[\sum_1^p (a_j) - \sum_1^q (b_j) + \frac{(p-q)\eta}{\sigma} \right] > \frac{1}{2} (p-q-1).$$

$$\operatorname{Re} \left[\sum_1^p (a_j) - \sum_1^q (b_j) + \frac{(p-q)(\eta-a-2)}{\sigma} \right] > \frac{1}{2} (p-q-1)$$

समाकलों की उपपत्ति

(1.1) की उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि [2, p. 943]

$$F_4[p, \delta; 1+a, 1+\beta; -xt, t(1-x)]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(p, r) (\delta, r)}{(1+a, r) (1+\beta, r)} P_r^{(\alpha, \beta)} (1-2x) t^r \quad (1.5)$$

जहाँ $0 < x < 1, |t| < 1$.

(1.5) के दोनों पक्षों में

$$(1.4) \quad x^\eta (1-x)^\beta G_{p,q}^{m,n} \left[zx^\sigma \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] \text{ से गुणा करने और } 0 \text{ से } 1 \text{ सीमाओं के बीच } x \text{ के प्रति समाकलित}$$

करने पर हमें (1.6) की प्राप्ति होती है।

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^\eta (1-x)^\beta F_4[p, \delta; 1+\beta; -xt, (1-x)t] G_{p,q}^{m,n} \left[zx^\sigma \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(p, r) (\delta, r)}{(1+\alpha, r) (1+\beta, r)} P_r^{(\alpha, \beta)} (1-2x) t^r \right] G_{p,q}^{m,n} \left[zx^\sigma \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] dx \quad (1.6) \end{aligned}$$

अब (1.6) के दाहिने पक्ष के समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलने पर तथा इस प्रकार से प्राप्त x -समाकल का मान ज्ञात पल^[8] की सहायता से ज्ञात करने पर हमें वांछित फल (1.1) प्राप्त होता है।

(1.6) के दाहिने पक्ष का यह क्रम परिवर्तन वैध है^[3] क्योंकि

$$(i) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(p, r) (\delta, r)}{(1+\alpha, r) (1+p, r)} P_r^{(\alpha, \beta)} (1-2x) t^r$$

समान रूप से स्थिर अन्तराल $(0, t)$ में $|t| < 1$, के लिए अभिसारी है।

$$(ii) \quad x^\eta (1-x)^\beta G_{p,q}^{m,n} \left[zx^\sigma \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] x \text{ का वैश्लेषिक फलन}^{[4]} \text{ है।}$$

(iii) (1.6) के वाम पक्ष का समाकल (1.1) में वर्णित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत परम अभिसारी है। इस प्रकार (1.1) की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

(1.1) की ही भाँति (1.2), (1.3) तथा (1.4) को भी सिद्ध किया जा सकता है जिसमें निम्नलिखित फलों [7, p. 281 (24); 9, p. 1035] का उपयोग किया जा सकता है।

$$[1 - (1-2x)t]^{-p} {}_2F_1 \left[\frac{p}{2}, \frac{p}{2} + \frac{1}{2}; \frac{4xt^2(x-1)}{[1 - (1-2x)t]^2} \right]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(p, r)}{(1+a, r)} P_r^{(\alpha, \alpha)} (1-2x) t^r, 0 < x < 1 \quad (1.7)$$

$$\rho^{-2a-1} \exp \frac{-t(1-2x-t)}{\rho^2} {}_0F_1 \left[\begin{matrix} - \\ a+1; \end{matrix} \frac{t^2(x-1)x}{\rho^2} \right]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r!}{(1+a, r)} L_r^{(2a)}(1) P_r^{(\alpha, \alpha)}(1-2x) t^r, 0 < x < 1 \quad (1.8)$$

जहाँ $\rho = [1 - 2(1-2x)t + t^2]^{1/2}$, (1.5) के स्थान पर

$$\begin{aligned} & [1 + (x-1)t]^{-a} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, \beta \\ p \end{matrix} ; \frac{xt}{1+(x-1)t} \right] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(p-\beta, r)}{r!} t^r {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -r, \beta \\ p \end{matrix} ; x \right], 0 < x < 1, \operatorname{Re}(p-a-\beta) > 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

2. विशिष्ट दशायें

(1.1) की विशिष्ट दशायें : (i) (1.1) में $\sigma=1$, $m=1$, $n=p=q=2$, $a_1=1-a$, $b_1=0$, $a_2=1-b$, $b_2=1-c$ रखने तथा विख्यात फल [4, p. 215] का उपयोग करने पर हमें निम्नलिखित समाकल प्राप्त होगा जो नया प्रतीत होता है।

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^\eta (1-x)^\beta F_4[p, \delta; 1+a, 1+\beta; -xt, (1-x)t] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ e \end{matrix} ; zx \right] dx \\ &= \Gamma(1+\beta) \Gamma(1+\eta) \Gamma(1-a+\eta) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(p, r) (\delta, r) (-t)^r}{r! (1+a, r) \Gamma(1-a+\eta-r) \Gamma(2+\beta+\eta+r)} \\ & \quad \times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} a, b, 1+\eta, 1-a+\eta \\ c, 1-a+\eta-r, 2+\beta+\eta+r \end{matrix} ; z \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

जहाँ $\operatorname{Re}(\eta) > -1$, $\operatorname{Re}(\beta) > -1$, $|t| < 1$, $|z| < 1$ अथवा $z=1$, $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$.

(ii) पुनः (2.1) में $a=-k$, $b=1+\beta+\eta+k$, $C=1+\eta$, $z=1/2$ रखने पर हमें ज्ञात फलों [7, p. 255, eq. (3); 4, p. 188, eq. (3)] से कतिपय सरलीकरण के पश्चात् निम्नलिखित नवीन समाकल प्राप्त होते हैं

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 x^\eta (1-x)^\beta F_4 [p, \delta; 1+\alpha, 1+\beta; -xt, (1-x)t] P_k^{(\eta, \beta)} (1-2x) dx \\
 &= \frac{(p, k) (\delta, k) (1+\alpha+\beta+k, k) \Gamma(1+\eta+k) \Gamma(1+\beta) t^k}{(1+\alpha, k) \Gamma(2+\beta+\eta+2k) k!} \\
 & \quad \times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} p+k, \delta+k, 1+\alpha+\beta+2k, \alpha-\eta \\ 1+\alpha+k, 1+\alpha+\beta+k, 2+\beta+\eta+2k \end{matrix} ; t \right] \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

जहाँ $Re(\eta) > -1$, $Re(\beta) > -1$ तथा $|t| < 1$.

(iii) पुनः यदि (1.1) में $\sigma=1$, $m=1$, $n=p=0$, $q=2$, $b_1=W/2$, $b_2=-W/2$ रखें, x के स्थान पर x^2 , z के स्थान पर $z^2/4$ रखें और उसमें ज्ञात फल [4, p. 179, eq. (44)] का उपयोग करें तो हमें

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 x^{2\eta+1} (1-x^2)^\beta F_4 [p, \delta; 1+\alpha, 1+\beta; -x^2 t, (1-x^2)t] \times J_w(zx) dx \\
 &= \frac{\Gamma(1+\beta) \Gamma(1+W/2+\eta) \Gamma(1+W/2-\alpha+\eta) z^w}{\Gamma(1+w) 2^{w+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(p, r) (\delta, r) t^r (-1)^r}{r! (1+\alpha, r)} \\
 & \quad \times \frac{1}{\Gamma(1+W/2-\alpha+\eta-r) \Gamma(2+\beta+\eta+W/2+r)} \\
 & \quad \times {}_2F_3 \left[\begin{matrix} 1+W/2+\eta, 1+W/2-\alpha+\eta \\ 1+W, 1+W/2-\alpha+\eta-r, 2+W/2+\beta+\eta \end{matrix} ; -z^2/4 \right] \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

प्राप्त होगा जहाँ

$$Re(2\eta+1) > 0, Re(\beta) > -1, Re(2\eta+W+2) > 0, |t| < 1.$$

(iv) पुनः (2.3) में $W=\alpha$, $\eta=\alpha/2$ रखने पर थोड़े से सरलीकरण के बाद हमें निम्नांकित समाकल प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 x^{\alpha+1} (1-x^2)^\beta F_4 [p, \delta; 1+\alpha, 1+\beta; -x^2 t, (1-x^2)t] J_\alpha(zx) dx \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1) 2^\beta}{z^{\beta+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(p, r) (\delta, r)}{(1+\alpha, r) r!} J_{\alpha+\beta+2r+1}(z) t^r \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

अन्त में यदि हम (1.1) में p के स्थान पर $-p$, δ के स्थान पर $1+\alpha+\beta+p$, $-xt$ के स्थान पर $\frac{-4}{(1-u)(1-v)}$ तथा $t(1-x)$ के स्थान पर $\frac{-v}{(1+u)(1-v)}$ रखें और ज्ञात फल [7, p. 269, eq. (7)] का उपयोग करें तो हाल ही में गोयल^[5] द्वारा प्राप्त फल मिलता है।

पुनः यदि हम उपर्युक्त प्रतिस्थापन (2.2) में करें तो हमें भोंसले^[1] का ज्ञात फल प्राप्त होगा।

संक्षेपण की दृष्टि से इस प्रपत्र में हमने (1.1) की ही विशिष्ट दशाओं का उल्लेख किया है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखिका प्रो० राठी तथा डा० के०सी० गुप्ता के प्रति आभार व्यक्त करती है जिन्होंने इस प्रपत्र के लेखन में सहायता पहुँचायी। बहुमूल्य सुझावों के लिए डा० एस०पी० गोयल भी धन्यवाद के पात्र हैं।

निर्देश

1. भोंसले, वी०आर०, *Bull. Cal. Maths. Soc.*, 1958, **50**, 159-164.
2. ब्रैफमैन, एफ०, *Proc. American Math. Soc.*, 1951, **2**, 942-949.
3. ब्रैफमैन, आई०आई०टी०. 'An Introduction to the theory of Infinite Series', मैकमिलन, न्यूयार्क, 1956
4. एडेल्यी, ए० इत्यादि 'Higher Transcendental Functions' भाग I, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1953
5. गोयल, एस० पी०, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, 1971, **74**, 25-33.
6. ल्यूक, वाई०एल०, 'The Special functions and their approximations-I', एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क 1969
7. रेनविले, ई०डी०, 'Special Functions', मैकमिलन, न्यूयार्क, 1963
8. मक्सेना, आर०के०, *Journ. Indian Math. Soc.*, 1964, **28**, 197-202.
9. वीजनर, एल०, *Pacific Journ. Math.*, 1955, **5**, 1033-1039.

H-फलनों वाले कतिपय सान्त द्विगुण समाकल

एस०एन० अगल तथा सी०एल० कौल

गणित विभाग, एम०आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर

[प्राप्त—मई 20, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में H -फलनों वाले कतिपय सान्त द्विगुण समाकलों का मान ज्ञात किया गया है।

Abstract

Certain finite double integrals involving H -functions. By S. N. Agal and C. L. Koul, Department of Mathematics, M.R. Engineering College, Jaipur.

In this paper certain finite double integrals involving H -functions have been evaluated.

1. प्रस्तावना

(i) मित्तल तथा गुप्ता^[4] द्वारा प्रचारित दो चरों वाले H -फलन को निम्न प्रकार से प्रदर्शित एवं परिभाषित किया जावेगा :

$$H \left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right] = H_{p_1, q_1 : p_2, q_2; p_3, q_3}^{0, n_1 : m_2, n_2; m_3, n_3}$$

$$\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((ap_1; ap_1, Ap_1)) : ((cp_2, \gamma p_2)); ((ep_3, Ep_3)) \\ ((b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})) : ((d_{q_2}, \tau_{q_2}); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t) \theta_1(s) \theta_2(t) x^s y^t ds dt \quad (1.1)$$

जहाँ

$$\phi(s, t) = \frac{\prod_{j=1}^{n_1} (1 - a_j + a_j s + A_j t)}{\sum_{j=1}^{q_1} \Gamma(1 - b_j + \beta_j s + B_j t) \prod_{j=n+1}^{p_1} \Gamma(a_j - a_j s - A_j t)} \quad (1.2)$$

$$\theta_1(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j - \tau_j s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1 - c_j + \gamma_j s)}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - d_j + \tau_j s) \prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j - \gamma_j s)} \quad (1.3)$$

एवं इसी प्रकार से $\theta_2(t)$ के लिए है तथा L_1, L_2 उपयुक्त रीति से परिभाषित हैं; $x, y \neq 0$, अस्तित्व आदि के प्रतिबन्ध भी उसी प्रपत्र^[4] में विस्तार से दिये हैं अतः यह मान लिया जावेगा कि पूरे प्रपत्र में उनकी तुष्टि होती है।

संकेत

(i) विन्दुओं ... का अर्थ है कि (1.1) में आये हुए वे ही प्राचल संगत स्थलों पर प्रयुक्त होंगे। पुनश्च $((a_p; a_p, A_p))$ से $(a_1; a_p, A_1), \dots, (a_p; a_p, A_p)$ -प्राचलों के अनुक्रम का प्रदर्शन होगा।

(ii) फाक्स के H -फलन को निम्न प्रकार से प्रदर्शित एवं परिभाषित किया जावेगा^[2] :

$$\begin{aligned} H_{p,q}^{m,n} [z] &= H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} ((a_p, e_p)) \\ ((b_q, f_q)) \end{matrix} \right. \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \theta_3(s) z^s ds \end{aligned} \quad (1.4)$$

जहाँ $\theta_3(s)$ $\theta_1(s)$ के समरूप है और L एक उपयुक्त कंटूर है। इस समाकल के अस्तित्व आदि के प्रतिबन्ध उसी प्रपत्र में दिये हुए हैं अतः यह मान लिया जावेगा कि पूरे प्रपत्र में उनकी तुष्टि होती है।

हमें निम्नलिखित परिणामों की आवश्यकता होगी^[3]

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(a+\beta)\theta} (\sin \theta)^{\alpha-1} (\cos \theta)^{\beta-1} d\theta = e^{i\pi\alpha/2} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (1.5)$$

जो $\text{Re}(\alpha) > 0, \text{Re}(\beta) > 0$ के लिए वैध है;

$$\int_0^1 x^c (1-x)^b P_k^{(a,b)}(1-2x) dx = \frac{\Gamma(c+1) \Gamma(b+k+1) \Gamma(a-c+k)}{k! \Gamma(a-c) \Gamma(b+c+k+2)} \quad (1.6)$$

जो $Re(c) > -1$, $Re(b) > -1$ के लिए वैध है जहाँ $P_k^{(a,b)}(x)$ जैकोबी का बहुपद है।

2. प्रमुख समाकल

$$\int_0^1 \int_0^1 x^c y^{a-1} (1-x)^b (1-y^2)^{\beta-1} Y^{\alpha+2\beta} P_k^{(a,b)}(1-2x)$$

$$H \left[\begin{matrix} z_1 Y^{u_1+\delta_1} y^{u_1} (1-y^2)^{\delta_1} \\ z_2 Y^{u_2+\delta_2} y^{u_2} (1-y^2)^{\delta_2} \end{matrix} \right] dx dy$$

$$= \frac{e^{i\pi a/2} \Gamma(b+k+1) \Gamma(c+1) \Gamma(a-c+k)}{k! \Gamma(a-c) \Gamma(b+c+k+2)}$$

$$\times H_{p_1+2, q_1+1: \dots; \dots}^{0, n_1+2: \dots; \dots} \left[\begin{matrix} z_3 e^{\frac{i\pi u_1}{2}} \\ z_2 e^{\frac{i\pi u_2}{2}} \end{matrix} \right]$$

$$\left[\begin{matrix} (1-a; u_1, u_2), (1-2\beta; 2\delta_1, 2\delta_2), ((a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})) : \dots; \dots \\ (1-a-2\beta; u_1+2\delta_1, u_2+2\delta_2), ((b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})) : \dots; \dots \end{matrix} \right] \quad (2.1)$$

जहाँ $Y = [\gamma(1-y^2) + iy]$

वर्तते कि

$$(i) \quad Re\left(\alpha + u_1 \frac{d_j}{\tau_j} + u_2 \frac{f_k}{F_k}\right) > 0, \quad Re\left(\beta + \delta_1 \frac{d_j}{\tau_j} + \delta_2 \frac{f_k}{F_k}\right) > 0,$$

$$(j=1, \dots, m_2; k=1, \dots, m_3)$$

$$(ii) \quad Re(c) > -1, Re(b) > -1, Re(a) > 0, Re(\beta) > 0, u_1, u_2, \delta_1, \delta_2 > 0;$$

$$\int_0^1 \int_0^1 x^c y^{a-1} (1-x)^b (1-y^2)^{\beta-1} Y^{\alpha+2\beta} P_k^{(a,b)}(1-2x)$$

$$\times H_{p,q}^{m,n} [zy^{u+\delta} x^\lambda y^u (1-y^2)^\delta] dx dy$$

$$= \frac{e^{i\pi\alpha/2} \Gamma(b+k+1)}{k!} H_{p+4, q+3}^{m+1, n+3} \left[ze^{i\pi u/2} \left| \begin{array}{l} (1-\alpha, u), (1-2\beta, 2\delta), (-c, \lambda), ((a_p, e_p)), (a-c, \lambda) \\ (a-c+k, \lambda), ((b_q, f_q)), (1-\alpha-2\beta, u+2\delta), (-1-b-c-k, \lambda) \end{array} \right. \right] \quad (2.2)$$

बशर्ते कि

$$\operatorname{Re} \left(\alpha + u \frac{b_j}{f_j} \right) > 0, \operatorname{Re} \left(\beta + \delta \frac{b_j}{f_j} \right) > 0, \operatorname{Re} \left(c + \lambda \frac{b_j}{f_j} \right) > -1, (j=1, \dots, m);$$

$$\int_0^1 \int_0^1 x^c y^{a-1} (1-x)^b (1-y^2)^{\beta-1} Y^{\alpha+2\beta} P_k^{(a,b)} (1-2x) \\ \times H_{p,q}^{m,n} [zx^\lambda y^4 (1-y^2)^{-\delta} Y^{u-\delta}] dx dy$$

$$= \frac{e^{i\pi\alpha/2} \Gamma(b+k+1)}{k!} H_{p+3, q+4}^{m+2, n+2} \left[ze^{i\pi u/2} \left| \begin{array}{l} (1-\alpha, u), (-c, \lambda), ((a_p, e_p)), (a-c, \lambda) \\ (2\beta, 2\delta), (a-c+k, \lambda), ((b_q, f)), (1-\alpha-2\beta, u+\delta), (-1-b-c-k, \lambda) \end{array} \right. \right] \quad (2.3)$$

बशर्ते कि

$$\operatorname{Re} \left(\alpha + u \frac{b_i}{f_i} \right) > 0, \operatorname{Re} \left[\beta + \delta \frac{(a_j-1)}{e_j} \right] > 0,$$

$$\operatorname{Re} \left(c + \lambda \frac{b_i}{f_i} \right) > -1, (j=1, \dots, n; i=1, \dots, m);$$

$$\int_0^1 \int_0^1 x^c y^{a-1} (1-x)^b (1-y^2)^{\beta-1} Y^{\alpha+2\beta} P_k^{(a,b)} (1-2x) \\ \times H_{p,q}^{m,n} [zx^{-\lambda} y^u (1-y^2)^{-\delta} Y^{u-\delta}] dx dy$$

$$= \frac{e^{i\pi\alpha/2} \Gamma(b+k+1)}{k!} H_{p+3, q+4}^{m+2, n+2} \left[ze^{i\pi u/2} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} (1-a, u), (1-a+c-k, \lambda), ((a_p, e_p)), (b+c+k+2, \lambda) \\ (2\beta, 2\delta), (c+1, \lambda), ((b_q, f_q)), (1-a+c, \lambda), (1-a-2\beta, u-2\delta) \end{array} \right] \quad (2.4)$$

वशत कि

$$u > 2\delta, \operatorname{Re} \left(\beta + \delta \frac{a_j - 1}{e_j} \right) > 0, \operatorname{Re} \left(c + \lambda \frac{a_j - 1}{e_j} \right) > -1,$$

$$\operatorname{Re} \left(a + u \frac{b_i}{f_i} \right) > 0, (j=1, \dots, n; i=1, \dots, m):$$

$$\int_0^1 \int_0^1 x^c y^{\alpha-1} (1-x)^b (1-y^2)^{\beta-1} Y^{\alpha+2\beta} P_k^{(a,b)} (1-2x)$$

$$\times H_{p,q}^{m,n} [zx^\lambda y^{-u} (1-y^2)^{-\delta} Y^{-(u+\delta)}] dx dy$$

$$= \frac{e^{i\pi a/2} \Gamma(b+k+1)}{k!} H_{p+3,q+4}^{m+3,n+1} \left[ze^{-i\pi u/2} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} (-c, \lambda), ((a_p, e_p)), (a+2\beta, u+2\delta), (a-c, \lambda) \\ (a, u), (2\beta, 2\delta), (a-c+k, \lambda), ((b_q, f_q)), (-1-b-c-k, \lambda) \end{array} \right] \quad (2.5)$$

वशत कि

$$\operatorname{Re} \left(c + \lambda \frac{b_i}{f_i} + 1 \right) > 0, \operatorname{Re} \left(a + u \frac{(a_j - 1)}{e_j} \right) > 0,$$

$$\operatorname{Re} \left(\beta + \delta \frac{(a_j - 1)}{e_j} \right) > 0, (j=1, \dots, n; i=1, \dots, m);$$

$$\int_0^1 \int_0^1 x^c y^{\alpha-1} (1-x)^b (1-y^2)^{\beta-1} Y^{\alpha+2\beta} P_k^{(a,b)} (1-2x)$$

$$\times H_{p,q}^{m,n} [zx^{-\lambda} y^u (1-y^2)^{\delta} Y^{u+\delta}] dx dy$$

$$= \frac{e^{i\pi a/2} \Gamma(b+k+1)}{k!} H_{p+4,q+3}^{m+1,n+3} \left[ze^{i\pi u/2} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} (1-a, u), (1-2\beta, 2\delta), (1-a+c-k, \lambda), ((a_p, e_p)), (b+c+k+2, \lambda) \\ (c+1, \lambda), ((b_q, f_q)), (1-a-2\beta, u+2\delta), (1-a+c, \lambda) \end{array} \right] \quad (2.6)$$

बशर्ते कि

$$\operatorname{Re}\left(c + \lambda \frac{(a_j - 1)}{e_j} + 1\right) > 0, \operatorname{Re}\left(a + u \frac{b_i}{f_i}\right) > 0,$$

$$\operatorname{Re}\left(\beta + \frac{\delta b_i}{f_i}\right) > 0, (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n);$$

$$\int_0^1 \int_0^1 x^c y^{a-1} (1-x)^b (1-y^2)^{\beta-1} Y^{\alpha+2\beta} P_y^{(a,b)} (1-2x)$$

$$\times H_{p,q}^{m,n} [zx^{-\lambda} y^{-u} (1-y^2)^{\delta} Y^{\delta-u}] dx dy$$

$$= \frac{e^{i\pi\alpha/2} \Gamma(b+k+1)}{k!} H_{p+3,q+4}^{m+2,n+2} \left[ze^{-i\pi u/2} \right]$$

$$(1-2\beta, 2\delta), (1-a+c-k, \lambda), ((a_p, e_p)), (b+c+k+2, \lambda)$$

$$(a, u), (c+1, \lambda), ((b_q, f_q)), (1-a-2\beta, 2\delta-u), (1-a+c, \lambda)$$

(2.7)

बशर्ते कि

$$u < 2\delta, \operatorname{Re}\left(c + \lambda \frac{(a_j - 1)}{e_j}\right) > -1, \operatorname{Re}\left(a + u \frac{(a_j - 1)}{e_j}\right) > 0,$$

$$\operatorname{Re}\left(\beta + \delta \frac{b_i}{f_i}\right) > 0, (i=1, \dots, m, j=1, \dots, n);$$

$$\int_0^1 \int_0^1 x^c y^{a-1} (1-x)^b (1-y^2)^{\beta-1} Y^{\alpha+2\beta} P_k^{(a,b)} (1-2x)$$

$$\times H_{p,q}^{m,n} [zx^{-\lambda} y^{-u} (1-y^2)^{-\delta} Y^{-(u+\delta)}] dx dy$$

$$= \frac{e^{i\pi\alpha/2} \Gamma(b+k+1)}{k!} H_{p+3,q+4}^{m+3,n+1} \left[ze^{-i\pi u/2} \right]$$

$$(1-a+c-k, \lambda), ((a_p, e_p)), (a+2\beta, u+2\delta), (b+c+k+2, \lambda)$$

$$(a, u), (2\beta, 2\delta), (c+1, \lambda), ((b_q, f_q)), (1-a+c, \lambda)$$

(2.8)

बशर्ते कि

$$Re\left(c + \lambda \frac{(a_j - 1)}{e_j}\right) > -1, Re\left(a + u \frac{(a_j - 1)}{e_j}\right) > 0,$$

$$Re\left(\beta + \delta \frac{(a_j - 1)}{e_j}\right) > 0, (j=1, \dots, n).$$

समाकल (2.2) से (2.8) तक में, $Y = [y^1 - y^2 + iy]$ तथा यह कल्पना की गई है कि (2.1) के साथ उल्लिखित (ii) के प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं तथा $u, \delta, \lambda > 0$.

उपपत्तियाँ : (2.1) की स्थापना हेतु (2.1) के समाकल्य में (1.1) से मेलिन-वार्नीज के कंटर समाकलों के पदों में दो चरों वाले H -फलन का मान लिखते हैं, और समाकलन के क्रम को उलट देते हैं (जो कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध हैं), (1.5) तथा (1.6) की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात करते हैं तो (1.1) की सहायता से विश्लेषण करने पर वांछित परिणाम (2.1) की प्राप्ति होती है।

शेष समाकलों (2.2) से (2.8) तक की उपपत्तियाँ इसी प्रकार हैं अतः उन्हें नहीं दिया गया।

3. विशिष्ट दशायेँ

(2.1) में $p_1 = q_1 = 0$ रखने पर

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 x^c y^{\alpha-1} (1-x)^b (1-y^2)^{\beta-1} Y^{a+2\beta} P_k^{(a,b)}(1-2x) \\ & \times H_{p_2, q_2}^{m_2, n_2} \left[z_1 y^{u_1} (1-y^2)^{\delta_1} Y^{u_1 + \delta_1} \middle| \begin{matrix} ((c_{p_2}, \gamma_{p_2})) \\ ((d_{q_2}, \tau_{q_2})) \end{matrix} \right] \\ & \times H_{p_3, q_3}^{m_3, n_3} \left[z_2 y^{u_2} (1-y^2)^{\delta_2} Y^{u_2 + \delta_2} \middle| \begin{matrix} ((e_{p_3}, E_{p_3})) \\ ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{matrix} \right] dx dy \\ & = \frac{e^{i\pi u/2} \Gamma(b+k+1) \Gamma(c+1) \Gamma(a-c+k)}{k! \Gamma(a-c) \Gamma(b+c+k+2)} \\ & \times H_{2, 1; \dots; \dots}^{0, 2; \dots; \dots} \left[\begin{matrix} z_1 e^{i\pi u_1/2} \\ z_2 e^{i\pi u_2/2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (1-a; u_1, u_2), (1-2\beta; 2\delta_1, 2\delta_2) : \dots; \dots \\ (1-a-2\beta; u_1+2\delta_1, u_2+2\delta_2 : \dots; \dots \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

बशर्ते कि (2.1) में उल्लिखित प्रतिबन्धों की तुष्टि हो।

(2.1) से लेकर (2.8) तक में निहित H -फलनों की सामान्य प्रकृति के कारण इसी प्रकार से अन्य अनेक विशिष्ट दशायें दी जा सकती हैं।

निर्देश

1. एडेल्टी, ए० इत्यादि, Tables of Integral Transforms, भाग II, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1954
2. गुप्ता, के०सी० तथा जैन, यू०सी०, प्रोसी० नेश० एके० साइंस इण्डिया, 1966, 36A 594.
3. मैकराबर्ट, टी० एम०, Math. Annal., 1961, 142, 450.
4. मित्तल, पी०के० तथा गुप्ता, के० सी०, प्रोसी० इण्डिया एके० साइंस, 1972, 75, 117.

स्टर्लिंग संख्याओं के कतिपय तत्समक

बी० के० राय, एस० एन० सिंह तथा वी०पी० सिंह
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—अप्रैल 5, 1982]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में प्रथम तथा द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग संख्याओं के लिए तत्समकों की स्थापना की गई है किन्तु सहचारी स्टर्लिंग संख्याओं के संगत तत्समक अन्तर्ज्ञानात्मक हो जाते हैं।

Abstract

Some identities for Stirling numbers. By B.K. Rai, S.N. Singh and V.P. Singh, Department of Mathematics, B.H.U., Varanasi.

The present paper establishes identities for Stirling numbers of the first kind and second kind, while the corresponding identities for the associated Stirling numbers are rendered intuitive.

1. प्रस्तावना

इस प्रपत्र में काल्टिज के अनुसार^[2] $S_1(n, k)$ तथा $S(n, k)$ क्रमशः प्रथम तथा द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग संख्याओं को सूचित करते हैं। $S_1(n, k)$ क्रमचयन है

$$Z_n = (1, 2, \dots, n)$$

का जिसमें k चक्र हैं जबकि $S(n, k)$ Z_n के k ब्लाकों में विभाजनों की संख्या है, यदि

$$S_1(n, k) = \sum_j \binom{n}{j} d(n-j, k-j), \quad (1.1)$$

तो $d(n, k)$ जो प्रथम प्रकार की सहचारी स्टर्लिंग संख्या है, Z_n के क्रमचयन की संख्या है जिसमें k चक्र हैं और प्रत्येक < 1 लम्बाई का है यदि

$$S(n, k) = \sum_j \binom{n}{j} b(n-j, k-j), \quad (1.2)$$

तो $b(n, k)$ Z_n के विभाजनों की संख्या है जिसमें k ब्लॉक हैं जिसमें से प्रत्येक की गणन संख्या > 1 है। यह विदित है कि प्रथम प्रकार की स्टर्लिंग संख्याएँ

$$[x]^n = \sum_{k=0}^n S_1(n, k) x^k \quad (1.3)$$

के द्वारा और दूसरे प्रकार की संख्याएँ

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) [x]_k, \quad (1.4)$$

के द्वारा परिभाषित की जा सकती हैं जहाँ $[x]^k$ से उन्नत क्रमगुणन (Factorial)

$$x(x+1), \dots, (x+k-1)$$

तथा $[x]_k$ से पतनोन्मुख क्रमगुणन

$$x(x-1), \dots, (x-k+1).$$

सूचित होते हैं। स्टर्लिंग संख्याओं के गुणों का उपयोग करते हुए हम निम्नलिखित तत्समकों को सिद्ध करना चाहते हैं

$$\sum_{j=i}^n (-1)^j S(n-i, j-i) \sum_{k=0}^j S_1(j, k) x^k = (-1)^n (x+i)^{n-i} [x]^i \quad (1.5)$$

$$\sum_{j=i}^n S_1(n-i, j-i) \sum_{k=0}^j S(j, k) [x]_k = x^i [x]^{n-i} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^n (-1)^j \sum_r \binom{n-i}{r} b(n-i-r, j-i-r) \sum_{k=0}^j \sum_s \binom{j}{s} d(j-s, k-s) x^k \\ = (-1)^n (x+i)^{n-i} [x]^i \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^n \sum_r \binom{n-i}{r} d(n-i-r, j-i-r) \sum_{k=0}^j \sum_s \binom{j}{s} b(j-s, k-s) [x]_k \\ = x^i [x]^{n-i} \end{aligned} \quad (1.8)$$

प्रत्येक संख्याओं i तथा n के लिए, जहाँ $i \leq n$.

(1.5) की उपपत्ति

(1.5) के वामपक्ष से प्रारम्भ करने पर

$$\begin{aligned} (-1)^{n-i} (x+i)^{n-i} [x]^i &= [x]^i \sum_{j=0}^{n-i} S(n-i, j) [-(x+i)]^j \\ &= \sum_{j=i}^n S(n-i, j-i) [x]^i [-(x+i)]_{j-i}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

रूपान्तर^[1] $[n]^r = (-1)^r [-n]_r$ के परिपेक्ष्य में (1.9) से

$$(-1)^{n-i} (x+i)^{n-i} [x]^i = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} S(n-i, j-i) [x]^j.$$

प्राप्त होता है।

सम्बन्ध (1.3) का उपयोग करने पर यह प्रदर्शित करना सरल है कि

$$(-1)^n (x+i)^{n-i} [x]^i = \sum_{j=i}^n (-1)^j S(n-i, j-i) \sum_{k=0}^j S_1(j, k) x^k,$$

जिससे (1.5) की स्थापना हो जाती है।

(1.6) की उपपत्ति

(1.6) को सिद्ध करने के लिए यह प्रदर्शित करना पर्याप्त होगा कि

$$x^i [x]^{n-i} = x^i \sum_{j=0}^{n-i} S_1(n-i, j) x^j$$

$$= \sum_{j=i}^n S_1(n-i, j-i) x^j,$$

जो (1.4) की सहायता से (1.6) प्रदान करता है।

हमारे द्वारा प्राप्त (1.7) तथा (1.8) की व्युत्पत्ति अत्यन्त प्रत्यक्ष है। यहाँ पर हमने (1.5) तथा (1.6) सम्बन्धों के साथ साथ (1.1) तथा (1.2) निरूपणों का उपयोग किया है। विस्तृत वर्णन छोड़ दिया गया है।

निर्देश

1. रायोर्डन, जे०, An Introduction to Combinatorial Analysis. जान विले एण्ड सन्स, न्यूयार्क, 1958
2. कार्लिट्ज, एल०, Duke Math. J., 1971, 38, 783.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 26, No. 2, 1982

कतिपय विस्तारित बरनौली तथा यूलर बहुपदों का अभिलक्षण-वर्णन

एस० एन० सिंह, वी० पी० सिंह तथा बी० के० राय

गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—मार्च 1, 1982]

सरांश

विस्तारित बरनौली तथा यूलर बहुपदों $B(n, h, a, k; x)$ के लिए गुणन सूत्र का प्रयोग किया गया है जिससे इन बहुपदों का अभिलक्षण ज्ञात हो सके।

Abstract

A characterization of some extended Bernoulli and Euler polynomials.
By S. N. Singh, V. P. Singh and B. K. Rai, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

A multiplication formula for the extended Bernoulli and Euler polynomial $B(n, h, a, k; x)$ has been used to characterize these polynomials, whereby the corresponding results for Bernoulli and Euler polynomials and numbers are rendered intuitive.

1. प्रस्तावना

विस्तारित बरनौली तथा यूलर बहुपदों एवं संख्याओं को सम्मिलित करने के उद्देश्य से सिंह तथा राय^[1] ने $B(n, h, a, k; x)$ बहुपदों का अध्ययन किया जिन्हें जनक सम्बन्ध

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(n, h, a, k; x)}{n^s} = \frac{2(\frac{1}{2}h \log \zeta(s))^k (\zeta(s))^{hx}}{(\zeta(s))^{h-a}} \quad (1.1)$$

द्वारा प्रचारित किया गया जहाँ a अनूत वास्तविक संख्या है, k एक अनूत पूर्णांक है तथा $h \neq 0$

उसमें निहित विभिन्न प्रावलों के विशिष्टीकरण से हमारे बहुपदों $B(n, h, a, k, x)$ तथा विस्तारित बरनौली, यूलर तथा यूलरी बहुपदों के मध्य निम्नलिखित सम्बन्ध पाया गया।

(i) विस्तारित बरनौली बहुपद

$$B(n, h, 1, 1; x) = \beta(n, h; x) \quad (1.2)$$

(ii) विस्तारित बरनौली संख्याएँ

$$B(n, h, 1, 1; 0) = \beta(n, h) \quad (1.3)$$

(iii) विस्तारित यूलर बहुपद

$$B(n, h, 1, 0; x) = \epsilon(n, h; x) \quad (1.4)$$

(iv) विस्तारित यूलर संख्याएँ

$$B(n, h, -1, 0; 0) = (n, h) \quad (1.5)$$

(v) विस्तारित यूलरी बहुपद

$$B(n, h, a, 0; x) = \frac{2}{1-a} H(n, h, a; x) \quad (1.6)$$

(vi) विस्तारित यूलरी संख्याएँ

$$B(n, h, a, 0; 0) = \frac{2}{1-a} H(n, h, a), \quad (1.7)$$

जहाँ विस्तारित बरनौली, यूलर तथा यूलरी बहुपदों एवं संख्याओं का सूत्रपात कार्लिट्ज^[1] ने किया।

इस टिप्पणी में हम यह प्रदर्शित करना चाहते हैं कि (1.1) का अभिलक्षण गुणन सूत्र

$$\sum_{r=0}^{m-1} \frac{B}{a^r} \left(n, mh, a^m, k; x + \frac{r}{m} \right) = \frac{m^k}{a^{m-1}} B(n, h, a, k; mx), \quad (1.8)$$

है जहाँ m धन संख्या के लिए आया है।

2. अभिलक्षण वर्णन

निएल्सेन की विधि^[2] का प्रयोग करते हुए हम देखेंगे कि बहुपद समुच्चय $D_n(x; a, k)$ जो

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n(x; a, k) \frac{t^n}{n!} = \frac{2 \left(\frac{t}{2} \right)^k \exp xt}{(\exp t - a)} \quad (2.1)$$

द्वारा^[1] परिभाषित हैं, जहाँ a अनृण वास्तविक संख्या है और k एक पूर्णांक है, उसका अभिलक्षण गुणन सूत्र

$$\sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{a^r} D_n \left(x + \frac{r}{m}; a^m, k \right) = \frac{m^{k-1}}{a^{m-1}} D_n(mx; a, k). \quad (2.2)$$

है। अधिक संक्षेप में, यदि बहुपद $f(x; a, k)$ द्वारा $m \neq 1$ के एक मान के लिए (2.2) की तुष्टि हो तो $f(x; a, k) = D_n(x; a, k)$.

अब माना कि $f(n, h, a, k; x)$ h तथा x दोनों में बहुपद है, तो

$$\sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{a^s} f \left(n, mh, a^m, k; x + \frac{s}{m} \right) = \frac{m^k}{a^{m-1}} f(n, h, a, k; mx). \quad (2.3)$$

हम

$$f(n, h, a, k; x) = \sum_r A_r(n, h, a, k) D_r(x; a, k), \quad (2.4)$$

भी रख सकते हैं जहाँ $A_r(n, h, a, k)$ h में बहुपद हैं।

(2.2), (2.3) तथा (2.4) से यह निकलता है कि

$$\sum_r A_r(n, h, a, k) D_r(mx; a, k) = \sum_r A_r(n, mh, a, k) D_r(mx, a, k) m^{-r} \quad (2.5)$$

अतः $m^r A_r(n, h, a, k) = A_r(n, mh, a, k)$.

चूँकि $A_r(n, h, a, k)$ h में बहुपद है अतः हम लिख सकते हैं कि

$$A_r(n, h, a, k) = \sum_j C_{rj}(n, a, k) h^j. \quad (2.6)$$

(2.5) में प्रतिस्थापित करने पर

$$m^r \sum_j C_{rj}(n, a, k) h^j = \sum_j C_{rj}(n, a, k) m^j h^j.$$

यह समस्त h के लिए सत्य होगा यदि और केवल यदि

$$m^r C_{rj}(n, a, k) = m^j C_{rj}(n, a, k), \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

अतः यदि (2.3) $m \neq 1$ के एक मान के लिए सत्य है तो हम पाते हैं कि

$$C_{rj}(n, a, k) = 0, \quad (r \neq j).$$

फलतः (2.6)

$$A_r(n, h, a, k) = C_r(n, a, k) h^r,$$

में समानीत हो जाता है जहाँ

$$C_r(n, a, k) = C_{rr}(n, a, k)$$

तथा (2.4)

$$f(n, h, a, k; x) = \sum_r C_r(n, a, k) D_r(x; a, k) h^r. \quad (2.7)$$

हो जाता है। इसके विलोमतः, (2.7) रूप का कोई भी बहुपद (2.3) की तुष्टि करता है जहाँ $C_r(n, a, k)$ यादृच्छिक है। विशेष रूप से यदि बहुपद $f(n, h, a, k; x)$ $m \neq 1$ से एक मान के लिए (2.3) की तुष्टि करे तो समीकरण समस्त m के लिए सही उतरता है।

निर्देश

1. कार्लिट्ज, एल०, Duke Math.J., 1964, 31, 667.
2. करण्डे, बी० के० तथा ठकारे, एन० के०, Indiad J. Pure Appl. Math., 1975, 6, 98.
3. निएल्सेन, एम०, Traite Elementaire des Nombres de Bernoulli, पेरिस 1923.
4. राय, बी० के० तथा सिंह, एस० एन०, Fibonacci Quart. J. (U. S.A) (प्रकाशनाधीन)

सान्त समाकल

वाई० एन० प्रसाद तथा यू० एस० मिश्र

सम्प्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीट्यूट आफ टेक्नॉलाजी,
बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—सितम्बर 5, 1981]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में जैकोबी बहुपद तथा कई चरों वाले परिवर्द्धित H -फलन के गुणनफल वाले एक सान्त समाकल का मान ज्ञात किया गया है।

Abstract

A finite integral involving a Jacobi polynomial and a modified H-function of several variables. By Y.N. Prasad and U.S. Mishra, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University Varanasi.

In this paper, a finite integral involving the product of Jacobi polynomial and modified H-function of several variables has been evaluated. As the modified H-function is of generalized character, a number of integrals involving these functions have been deduced. The integrals would also yield relations for Appell function, Kampe de Fériet functions, Meiger's G-function etc. on specializing the parameters. Expansion for modified H-function of several variables in a series involving the product of a Jacobi polynomial and an H-function has been obtained by using these integrals.

1. प्रस्तावना

α -चरों वाला परिवर्द्धित H -फलन की परिभाषा प्रसाद तथा सिंह^[1] ने निम्न प्रकार दी है

$$H_{p,q;R:(M',N');\dots;(M^{(r)},N^{(r)})}^{0,n;R:(M',N');\dots;(M^{(r)},N^{(r)})} \left\{ \left(a_p; \left(\alpha_p^{(i)} \right)_{i=1,\dots,r} \right) \right\} \left\{ \left(b_q; \left(\beta_q^{(i)} \right)_{i=1,\dots,r} \right) \right\};$$

$$\left\{ \left(l_R; \left(u_R^{(i)}, f_R^{(i)} \right)_{i=1 \dots r} \right) : \{ (c'_p, v'_p) \}; \dots; \left\{ \left(c_p^{(r)}, v_p^{(r)} \right) \right\} \right. \\ \left. \left\{ (l_R; \left(U_R^{(i)}, f_R^{(i)} \right)_{i=1 \dots r}) : \{ (d'_Q, \delta'_Q) \}; \dots; \left\{ \left(d_Q^{(r)}, \delta_Q^{(r)} \right) \right\} \right\}^{x_1, \dots, x_r} \right\} \\ = (2\pi\omega)^{-r} \int_{L_1} \dots \int_{L_r} \phi_1(s_1) \dots \phi_r(s_r) \psi(s_1, \dots, s_r) \\ x_1^{s_1}, \dots, x_r^{s_r} ds_1 \dots ds_r \quad (1.1)$$

$$\text{जहाँ } \phi_i(s_i) = \frac{\prod_{j=1}^{M^{(i)}} \Gamma \left(d_j^{(i)} - \delta_j^{(i)} s_i \right) \prod_{j=1}^{N^{(i)}} \Gamma \left(1 - c_j^{(i)} + \gamma_j^{(i)} s_i \right)}{\prod_{J=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}} \Gamma \left(1 - d_j^{(i)} + \delta_j^{(i)} s_i \right) \prod_{J=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}} \Gamma \left(c_j^{(i)} - \gamma_j^{(i)} s_i \right)} \\ , i=1, \dots, r \quad (1.2)$$

$$\psi(s_1, \dots, s_r) = \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma \left(1 - a_j + \sum_{i=1}^r a_j^{(i)} s_i \right)}{\prod_{j=1} \Gamma \left(1 - b_j + \sum_{i=1}^r \beta_j^{(i)} s_i \right) \prod_{j=n+1}^p \Gamma \left(a_j - \sum_{i=1}^r a_j^{(i)} s_i \right)}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^R \Gamma \left(l_j + \sum_{i=1}^r U_j^{(i)} f_j^{(i)} s_i \right)}{\prod_{j=1}^R \Gamma \left(l_j + \sum_{i=1}^r U_j^{(i)} f_j^{(i)} s_i \right)} \quad (1.3)$$

यहाँ पर तथा इसके आगे सर्वत्र (i) से डेशों की संख्या सूचित होगी यथा $b^{(1)}=b', b^{(2)}=b''$ इत्यादि, $\omega=\sqrt{-1}$, $\{(c_p, \gamma_p)\}$ तथा $\left\{ \left(a_p; \left(a_p^{(i)} \right)_{i=1, \dots, r} \right) \right\}$ से क्रमशः p प्राचलों के अनुक्रम $(c_1, \gamma_1), \dots, (c_p, \gamma_p)$ तथा $\left(a_1; \left(a_1^{(i)} \right)_{i=1, \dots, r} \right), \dots, \left(a_p; \left(a_p^{(i)} \right)_{i=1, \dots, r} \right)$ का बोध होगा। रिक्त गुणनफल को इकाई माना गया है, (1.2) तथा (1.3) में आये गुणों $a_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}, \gamma_j^{(i)}, \delta_j^{(i)}, f_j^{(i)}$ वन तथा वास्तविक हैं एवं a_j, b_j, c_j, d_j, l_j सम्मिश्र संख्याएँ हैं; $n, M^{(i)}, N^{(i)}, p, q, P^{(i)}, Q^{(i)}$ धन पूर्णांक हैं जिससे कि $0 \leq q, 0 \leq n \leq p, 0 \leq M^{(i)} \leq Q^{(i)}, 0 \leq N^{(i)} \leq P^{(i)}$ R अनृण संख्या है जिससे $\psi(s_1, \dots, s_r)$ के हर में सम्मिश्र संकेतों वाले Γ फलनों की संख्या सूचित करता है, अभिसरण के प्रतिबन्ध निर्देशांक में दिए गए हैं।

2. प्रमुख समाकल

हमें जिस समाकल का मान ज्ञात करना है वह है

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\rho} (1+x)^{\sigma} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) {}_H_{p, q; R}^{0, n; 0; (M', N'); \dots; (M^{(r)}, N^{(r)})} [P', Q'; \dots; [P^{(r)}, Q^{(r)}] \left\{ \left\{ a_p; \left(\alpha_p^{(i)} \right)_{i=1, \dots, r} \right\} : \{ (c'_p, \gamma'_p) \}; \dots; \left\{ \left(c_{p^{(r)}}^{(r)}, \gamma_{p^{(r)}}^{(r)} \right) \right\} ; \right. \\ \left. \left\{ \left(b_q; \left(\beta_q^{(i)} \right)_{i=1, \dots, r} \right) ; \left\{ \left(l_R; \left(U_R^{(i)}, f_R^{(i)} \right)_{i=1, \dots, r} \right\} : \right. \right. \\ \left. \left\{ \left(d'_{q'}, \delta'_{q'} \right) \right\}; \dots; \left\{ \left(d_{Q^{(r)}}, \delta_{Q^{(r)}} \right) \right\}; z_1(1-x)^{h_1}(1+x)^{\mu_1}, z_2(1-x)^{h_2}(1+x)^{-\mu_2}, \right. \\ \left. \dots, z_r(1-x)^{h_r}(1+x)^{(-1)^{\mu_r}} \right\} dx$$

$$= \frac{2^{\rho+\sigma+1} \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)} \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m (a+\beta+1+n)_m}{m! (\alpha+1)_m}$$

$${}_H_{p+1, q; R+1}^{0, n+1; 2; (M', N'); \dots; (M^{(r)}, N^{(r)})} [P', Q'; \dots; [P^{(r)}, Q^{(r)}] \left\{ (-f-m; h_1, \dots, h_r), \right. \\ \left. \left\{ \left(b_q; \left(\beta_q^{(i)} \right)_{i=1, \dots, r} \right) \right\} ; \right.$$

$$\left. \left\{ \left(a_p; \left(\alpha_p^{(i)} \right)_{i=1, \dots, r} \right) \right\}; (\sigma+1; \mu_1, -\mu_2, \mu_3, \dots, (-1)^{r+1}\mu_r) : \right.$$

$$(\rho+\sigma+2+m; h_1+\mu_1, h_2-\mu_2, h_3+\mu_3, \dots, h_r+(-1)^{r+1}\mu_r), \left\{ \left(l_R; \left(U_R^{(i)}, f_R^{(i)} \right)_{i=1, \dots, r} \right) \right\}$$

$$\{ (c'_{p'}, \gamma'_{p'}) \}; \dots; \{ (c_{p^{(r)}}^{(r)}, \gamma_{p^{(r)}}^{(r)}) \} ; z_1 2^{h_1+\mu_1}, z_2 2^{h_2-\mu_2}, \\ \{ (d'_{q'}, \delta'_{q'}) \}; \dots; \{ (d_{Q^{(r)}}^{(r)}, \delta_{Q^{(r)}}^{(r)}) \}$$

$$z_3 2^{h_3+\mu_3}, \dots, z_r 2^{h_r+(-1)^{\mu_r}} \right\}$$

बशर्ते कि $\rho, \sigma, h_i (i=1, \dots, r), \mu_i (i=1, \dots, r)$ धन हैं

$$\operatorname{Re}(\beta+1) > 0, \operatorname{Re}\left(1+\rho+\sum_{i=1}^r h_i \alpha_i\right) > 0, \operatorname{Re}\left(1+\sigma+\sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \mu_i \alpha_i\right) > 0,$$

$$|\arg Z_i| < \frac{1}{2} V_i \pi, \text{ जहाँ } \alpha_i = \min \operatorname{Re}(d_j^{(i)} / \delta_j^{(i)}), j=1, \dots, M^{(i)}, i=1, \dots, r$$

$$\begin{aligned} \text{तथा } V_i = & \sum_{j=1}^n a_j^{(i)} - \sum_{j=n+1}^b a_j^{(i)} - \sum_{j=1}^q \beta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{M^{(i)}} \delta_j^{(i)} - \sum_{j=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}} \delta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{N^{(i)}} \gamma_j^{(i)} \\ & - \sum_{j=N^{(i)}+1}^P \gamma_j^{(i)} - \sum_{j=1}^R f_j^{(i)}. \end{aligned}$$

उपपत्ति : (2.1) को सिद्ध करने के लिये हम समाकलय में (1.1) का व्यवहार करते हुये समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलते हैं। तब बायें सदस्य को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\frac{1}{(2\pi\omega)^r} \int_{L_1} \dots \int_{L_r} \phi_1(s_1) \dots \phi_r(s_r) \psi(s_1, \dots, s_r) z_1^{s_1}, \dots, z_r^{s_r}$$

$$\left[\int_{-1}^1 (1-x)^\rho (1+x)^\sigma + \sum_{i=1}^r h_i s_i (1+x)^{\sigma + \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \mu_i s_i} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx \right] ds_1, \dots, ds_r. \quad (2.2)$$

अन्तरिक समाकल का मान एर्डेली इत्यादि [4] [1955, 283(3)] की सहायता से निकालने पर अर्थात्

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x)^\rho (1+x)^\sigma P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx = & \frac{2^{\rho+\sigma+1} \Gamma(\rho+1) \Gamma(\sigma+1) \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\rho+\sigma+2) \Gamma(n+1) \Gamma(\alpha+1)} \\ & \times {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, \alpha+\beta+n+1, \rho+1 \\ \alpha+1, \rho+\sigma+2 \end{matrix} ; 1 \right], \quad (2.3) \end{aligned}$$

जहाँ $(\operatorname{Re} \rho, \operatorname{Re} \sigma) > -1$, तो हमें (2.2) निम्न प्रकार से प्राप्त होता है

$$\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{(2\pi\omega)^r} \int_{L_1} \dots \int_{L_r} \frac{2^{\rho+\sigma+1} \sum_{i=1}^r h_i s_i + \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \mu_i s_i \Gamma\left(\rho+1 + \sum_{i=1}^r h_i s_i\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma(\alpha+1) \Gamma\left(\rho+\sigma+2 + \sum_{i=1}^r h_i s_i + \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \mu_i s_i\right)}$$

$$\Gamma\left(1+\sigma+\sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \mu_i s_i\right) {}_3E_2 \left[\begin{matrix} -n, \alpha+\beta+n+1, \rho+1+\sum_{i=1}^r h_i s_i; 1 \\ \alpha+1, \rho+\sigma+2+\sum_{i=1}^r h_i s_i+\sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \mu_i s_i \end{matrix} \right]$$

$$\phi_1(s_1) \dots \phi_r(s_r) \psi(s_1, \dots, s_r) z_1^{s_1}, \dots, z_r^{s_r} ds_1 \dots ds_r$$

$$= \frac{2^{\rho+\sigma+1} \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(\alpha+1)} \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m (\alpha+\beta+n+1)_m}{m! (1+\alpha)_m} \frac{1}{(2\pi\omega)^r} \int_{L_1} \dots \int_{L_r}$$

$$\times \frac{\sum_{i=1}^r h_i s_i + \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \mu_i s_i \Gamma\left(\rho+m+1+\sum_{i=1}^r h_i s_i\right) \Gamma\left(\sigma+1+\sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \mu_i s_i\right)}{\Gamma\left(\rho+\sigma+2+m+\sum_{i=1}^r h_i s_i+\sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \mu_i s_i\right)}$$

$$\phi_1(s_1) \dots \phi_r(s_r) \psi(s_1, \dots, s_r) z_1^{s_1}, \dots, z_r^{s_r} ds_1 \dots ds_r, \quad (2.4)$$

जिससे (2.1) प्राप्त होता है ।

3. विशिष्ट दशायें

(I) (2.1) में $h_1=h_2=h_3=\dots=h_r=0$ मानते तथा $\rho=\alpha$ रखने और H -फलन को कंठूर समाकलों के दक्षिण पक्ष में अभिव्यक्त करने, समाकलन तथा संकलन के क्रम को परस्पर विनिमय करने, समाकल के अन्तर्गत की श्रेणी का मान गॉस प्रमेय की सहायता से निकालने एवं पुनः (1.1) का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित फल प्राप्त होता है ।

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\sigma P_n^{(\alpha, \beta)}(x) H_{p, q}^{0, n; 0 : (M', N'); \dots; (M^{(r)}, N^{(r)})} [P', Q'; \dots; [P^{(r)}, Q^{(r)}]$$

$$\left[\begin{matrix} \{(a_q; (a_p^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}; \{(c'_p, \gamma'_p)\}; \dots; \{(c_{p(r)}^{(r)}, \gamma_{p(r)}^{(r)})\} \\ \{(b_q; (\beta_q^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}; \{(l_R; (U_R^{(i)}, f_R^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\} :: \{(d'_q, \delta'_q)\}; \dots; \{(d_{q(r)}^{(r)}, \delta_{q(r)}^{(r)})\}; \end{matrix} \right]$$

$$\left. \begin{aligned}
& ; z_1(1+x)^{\mu_1}, z_2(1+x)^{-\mu_2}, \dots, z_r(1+x)^{(-1)^{r+1}\mu_r} \\
& = \frac{2^{\rho+\sigma+1} \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)} H_{p+1, q; R: [P', Q']; \dots; [P^{(r)}, Q^{(r)}]}^{0, n+1; 1: (M', N'); \dots; (M^{(r)}, N^{(r)})} \\
& \left[\begin{aligned}
& (-\alpha-m; 0), \{(a_p; (a_p^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\} \\
& \{(b_q; (\beta_q^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}, (\alpha+\sigma+2+m; \mu_1, -\mu_2, \dots, (-1)^{r+1}\mu_r); \\
& (\sigma+1: \mu_1, -\mu_2, \dots, (-1)^{r+1}\mu_r), : \{(c'_{p'}, \gamma'_{p'})\}; \dots; \{(c^{(r)}_{p(r)}, \gamma^{(r)}_{p(r)})\} \\
& \{(l_R; (U_R^{(i)}, f_R^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}, : \{(d'_{Q'}, \delta'_{Q'})\}; \dots; : \{(d^{(r)}_{Q(r)}, \delta^{(r)}_{Q(r)})\} \\
& ; z_1 2^{\mu_1}, z_2 2^{-\mu_2}, \dots, z_r 2^{(-1)^{r+1}\mu_r}
\end{aligned} \right] , \quad (3.1)
\end{aligned}$$

वशत कि α, σ, μ_i ($i=1, \dots, r$) घनात्मक हैं

$$Re(\beta+1) > 0, Re(\alpha+1) > 0, Re\left(1+\sigma + \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \mu_i \alpha_i\right) > 0,$$

$|\arg z_i| < \frac{1}{2} V_i \pi$, जहाँ α_i तथा V_i (2.1) के ही समान हैं

(II) (2.1) में $h_1=\mu_1, h_2=\mu_2, \dots, h_r=\mu_r$, रखने पर,

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 (1-x)^\rho (1+x)^\sigma P_n^{(\alpha, \beta)}(x) H_{p, q; R: [P', Q']; \dots; [P^{(r)}, Q^{(r)}]}^{0, n; 0: (M', N'); \dots; (M^{(r)}, N^{(r)})} \\
& \left[\begin{aligned}
& \{(a_p; (a_p^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}; \{(c'_{p'}, \gamma'_{p'})\}; \dots; \{(c^{(r)}_{p(r)}, \gamma^{(r)}_{p(r)})\}; \\
& \{(b_q; (\beta_q^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}; \{(l_R; (U_R^{(i)}, f_R^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}; \{(d'_{Q'}, \delta'_{Q'})\}; \dots; \{(d^{(r)}_{Q(r)}, \delta^{(r)}_{Q(r)})\} \\
& ; z_1(1-x^2)^{\mu_1}, (1-x)^{\mu_2} (1+x)^{-\mu_2}, z_3(1-x^2)^{\mu_3}, \dots, z_r(1-x)^{\mu_r}(1+x)^{(-1)^{r+1}\mu_r}
\end{aligned} \right] dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{2^{\rho+\sigma+1} \Gamma(n+a+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(a+1)} \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m (a+\beta+n+1)_m}{m! (a+1)_n}$$

$$H_{p+1, q}^{0, n+1; 1 : (M', N'); \dots; (M^{(r)}, N^{(r)})} \left[\begin{matrix} (-\sigma-m; \mu_1, -\mu_2, \dots, (-1)^{r+1} \mu_r); \\ \{(b_q; (\beta_q^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}; \end{matrix} \right.$$

$$\{(a_p; (a_p^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}; (\sigma+1; \mu_1, -\mu_2, \mu_3, \dots, (-1)^{r+1} \mu_r),$$

$$(\rho+\sigma+2+m; 2\mu_1, 2\mu_3, \dots, (1+(-1)^{r+1} \mu_r); \{(l_R; (U_R^{(i)}, f_R^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\};$$

$$\left. \begin{matrix} \{(c'_{p'}, \gamma'_{p'})\}; \dots; \{(c^{(r)}_{p(r)}, \gamma^{(r)}_{p(r)})\} \\ ; z_1 2^{2\mu_1}, z_2, \dots, z_r 2^{(1+(-1))^{r+1} \mu_r} \\ \{(d'_{Q'}, \delta'_{Q'})\}; \dots; \{(d^{(r)}_{Q(r)}, \delta^{(r)}_{Q(r)})\} \end{matrix} \right\} \quad (3.2)$$

वर्तते कि $\rho, \sigma, \mu_i (i=1, \dots, r)$ घनात्मक हैं

$$Re(\beta+1) > 0, Re\left(1+\rho + \sum_{i=1}^r \mu_i a_i\right) > 0, Re\left(1+\sigma + \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \mu_i a_i\right) > 0,$$

$|\arg Z_i| < \frac{1}{2} V_i \pi$, जहाँ a_i तथा V_i (2.1) के ही समान हैं

(III) (2.1) में $n=p=q=0$, रखने पर

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\rho (1+x)^\sigma P_n^{(\alpha, \beta)}(x) H_{R: P', Q': [P'', Q'']; \dots; [P^{(r)}, Q^{(r)}]}^{0: M', N': (M'', N''); \dots; (M^{(r)}, N^{(r)})}$$

$$\left[\begin{matrix} \{(c'_{p'}, \gamma'_{p'})\}; \dots; \{(c^{(r)}_{p(r)}, \gamma^{(r)}_{p(r)})\}; \\ \{(l_R; (U_R^{(i)}, f_R^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\} : \{(d'_{Q'}, \delta'_{Q'})\}; \dots; \{(d^{(r)}_{Q(r)}, \delta^{(r)}_{Q(r)})\} \\ ; z_1 (1-x)^{h_1} (1+x)^{\mu_1}, z_2 (1-x)^{h_2} (1-x)^{-\mu_2}, \dots, z_r (1-x)^{h_r} (1+x)^{(-1)^{r+1} \mu_r} \end{matrix} \right] dx$$

$$= \frac{2^{\rho+\sigma+1} \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(\alpha+1)} \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m (\alpha+\beta+n+1)_m}{m! (\alpha+1)_m}$$

$$H_{1,0; R+1}^{0,1; 1: (M', N'); \dots; (M^{(r)}, N^{(r)})} [P', Q']; \dots; [P^{(r)}, Q^{(r)}]$$

$$\left[\begin{aligned} &(-\rho-m; h_1, \dots, h_r); (\sigma+1; \mu_1, -\mu_2, \dots, (-1)^{r+1}\mu_r); \\ &(\rho+\sigma+2+m; h_1+\mu_1, h_2-\mu_2, \dots, h_r+(-1)^{r+1}\mu_r), \{(l_R; (U_R^{(i)}, f_R^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}; \\ &\left\{ \begin{aligned} &\{(c'_{p'}, \gamma'_{p'})\}; \dots; \{(c^{(r)}_{p(r)}, \gamma^{(r)}_{p(r)})\} \\ &\{(d'_{q'}, \delta'_{q'})\}; \dots; \{(d^{(r)}_{q(r)}, \delta^{(r)}_{q(r)})\} \end{aligned} \right. ; z_1 2^{h_1+\mu_1}, z_2 2^{h_2-\mu_2}, \dots, z_r 2^{h_r+(-1)^{r+1}\mu_r} \end{aligned} \right], \quad (3.3)$$

बशर्ते कि $\rho, \sigma, h_i (i=1, \dots, r), i=1, \dots, r)$ घनात्मक हैं

$$Re(\beta+1) > 0, Re\left(1+\rho+\sum_{i=1}^r h_i \alpha_i\right) > 0, Re\left(1+\sigma+\sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} \mu_i \alpha_i\right) > 0,$$

$|\arg z_i| < \frac{1}{2} V_i \pi$, जहाँ α_1 तथा V_1 (2.1) के ही समान हैं

(IV) (2.1) में $R=0, M'=M''=\dots=M^{(r)}=0=N'=N''=\dots=N^{(r)}, P'=P''=\dots=P^{(r)}=0=Q=Q'=Q''=\dots=Q^{(r)}$ तथा $r=2$ रखने पर यह निम्न में समानीत हो जाता है

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\rho (1+x)^\sigma P_n^{(\alpha, \beta)} H[z_1 (1-x)^{h_1} (1+x)^{\mu_1}, z_2 (1-x)^{h_2} (1+x)^{\mu_2}] dx$$

$$= \frac{2^{\rho+\sigma+1} \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(\alpha+1)} \sum_{m=1}^n \frac{(-1)_m (\alpha+\beta+n+1)}{m! (1+\alpha)_m}$$

$$H_{p+2, q+1}^{0, n+2} \left[\begin{aligned} &2^{h_1+\mu_1} z_1 \left| (-\rho-m; h_1, h_2), (-\sigma; \mu_1, \mu_2), \{(a_p; \alpha_p^1, \alpha_p^2)\} \right. \\ &2^{h_2+\mu_2} z_2 \left| \{(b_q, \beta_q^1, \beta_q^2)\}, (-\rho-\sigma-m-1; h_1+\mu_1, h_2+\mu_2) \right. \end{aligned} \right] \quad (3.4)$$

समीकरण (3.4) सिंह^[2] का फल (2.1) है।

(V) (3.4) में $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma = \beta$, $h_1 = h_2$ रखने तथा दक्षिण पक्ष में दो चरों वाले H -फलन के लिए कंडूर समाकलों में रखने पर, समाकलन तथा संकलन के क्रम को परस्पर विनिमय करने, आन्तरिक श्रेणी का मान

$${}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, \alpha, \beta; \\ \gamma, \alpha + \beta - \gamma - n + 1 \end{matrix} ; 1 \right] = \frac{(\gamma - \alpha)_n (\gamma - \beta)_n}{(\gamma)_n (\gamma - \alpha - \beta)_n} \quad (3.5)$$

की सहायता से निकालने एवं तब स्नेडान^[6] अर्थात्

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma'(n-s+1)} = (-1)^s (-n)_s \quad (3.6)$$

का उपयोग करने पर हमें साहा का नवीन फल^[5] प्राप्त होता है [5, p. (53) Eq. (2.3)]।

4. प्रसार

इस अनुभाग में समाकल (2.1) का प्रयोग करते हुए जैकोबी बहुपद तथा कई चरों वाले परिवर्धित H -फलन के लिए निम्नलिखित प्रसार (2.1) में दिये गए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत प्राप्त करेंगे।

$$(1-x)^\rho (1+x)^\sigma H_{p,q}^{0,n;0:(M',N');...:(M^{(r)},N^{(r)})}_{p,q;R:[P',Q'];...:[P^{(r)},Q^{(r)}]} \left\{ \begin{matrix} \{(a_p; (a_p^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}; \\ \{b_q; (\beta_q^{(i)})_{i=1}, \dots, r\}; \end{matrix} \right.$$

$$\{(c'_{p'}, \gamma'_{p'})\}; \dots; \{(c^{(r)}_{p^{(r)}}, \gamma^{(r)}_{p^{(r)}})\};$$

$$\{(l_R; (U_R^{(i)}, f_R^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}; \{(d'_{\underline{1}'}, \delta'_{\underline{1}'})\}; \dots; \{(d'_{\underline{r}'}, \delta'_{\underline{r}'})\}; \dots; \{(d^{(r)}_{Q^{(r)}}, \delta^{(r)}_{Q^{(r)}})\}$$

$$\left. ; z_1(1-x)^{h_1} (1+x)^{\mu_1}, z_2(1-x)^{h_2} (1+x)^{-\mu_2}, \dots, z_r(1-x)^{h_r} (1+x)^{(-1)^{\mu_r} r+1} \right\}$$

$$= 2^{\rho+\sigma} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-r)_m (\alpha + \beta + 2r + 1) \Gamma(\alpha + \beta + r + m + 1)}{m! \Gamma(\alpha + m + 1) \Gamma(\beta + r + 1)} P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$$

AP 10

$$H_{p+1, q; R+1}^{0, n+1; (M', N'); \dots; (M^{(r)}, N^{(r)})} \left\{ \begin{array}{l} (-\alpha - \rho - m; h_1, \dots, h_r), \\ \{(b_q; (\beta_q^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}; \end{array} \right.$$

$$\{(a_p; (a_p^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}; (-\sigma - \beta; \mu_1, -\mu_2, \dots, (-1)^{r+1} \mu_r)$$

$$(-\rho - \sigma - \alpha - \beta - m - 1; h_1 + \mu_1, h_2 - \mu_2, \dots, h_r + (-1)^{r+1} \mu_r), \{(l_R; (U_R^{(i)}, f_R^{(i)})_{i=1} \dots r)\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \{(c_p', \gamma_p')\}; \dots; \{(c_{p(r)}^{(r)}, \gamma_{p(r)}^{(r)})\} \\ \{(d_q', \delta_q')\}; \dots; \{(d_{q(r)}^{(r)}, \delta_{q(r)}^{(r)})\} \end{array} \right\} ; z_1 2^{h_1 + \mu_1}, z_2 2^{h_2 - \mu_2}, \dots, z_r 2^{h_r + (-1)^{r+1} \mu_r} \quad (4.1)$$

उपपत्ति (4.1) को प्राप्त करने के लिए (4.1) के वाम पक्ष को

$$\sum_{r=0}^{\infty} M, P_r^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (4.2)$$

मान लेंगे ।

समीकरण (4.2) वैध है क्योंकि वाम पक्ष का व्यंजक संतत है और विवृत अन्तराल $(-1, 1)$ में परिवर्द्ध विचरण वाला है । (4.2) के दोनों पक्षों को $(1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ से गुणा करते और -1 से $+1$ सीमाओं के बीच x के प्रति जैकोबी बहुपदों के ^[4] लाम्बिकता गुण का उपयोग करके समाकलित करने तथा वाम पक्ष [p. 286, Eq.(5) and (9)] का (2.1) की सहायता से मान निकालने पर हमें

$$M_n = \frac{2^{\rho+\sigma} \Gamma(\alpha+\beta+n+1) (\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1+n)} \sum_{m=0}^n \frac{(-n)_m (\alpha+\beta+n+1)_m}{m! (1+\alpha)_m}$$

$$H_{p+1, q; R+1}^{0, n+1; 1; (M', N'); \dots; (M^{(r)}, N^{(r)})} \left\{ \begin{array}{l} (-\alpha - \rho - m; h_1, \dots, h_r) \\ \{(b_q; (\beta_q^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}; \end{array} \right.$$

$$\{(a_p; (a_p^{(i)})_{i=1}, \dots, r)\}; (-\sigma - \beta; \mu_1, -\mu_2, \dots, (-1)^{r+1} \mu_r),$$

$$(-\rho - \sigma - \alpha - \beta - m - 1; h_1 + \mu_1, h_2, \dots, \mu_2, \dots, h_r + (-1)^{r+1} \mu_r), \{(l_R (U_R^{(i)}, f_R^{(i)})_{i=1, \dots, r})\};$$

$$\left. \begin{aligned} &\{(c'_{p'}, \gamma'_{p'})\}; \dots; \{(c^{(r)}_{p(r)}, \gamma^{(r)}_{p(r)})\} \\ &\{(d'_{q'}, \delta'_{q'})\}; \dots; \{(d^{(r)}_{q(r)}, \delta^{(r)}_{q(r)})\} \end{aligned} \right\} ; z_1 2^{h_1+\mu_1}, z_2 2^{h_2+\mu_2}, \dots, z_r 2^{h_r+(-1)^{r+1}\mu_r}, \quad (4.3)$$

प्राप्त होता है। (4.2) में (4.3) से M_r का मान रखने पर हमें (4.1) प्राप्त होता है।

विशिष्ट दशाएँ

(4.2) में $r=2$, $M'=M''=\dots=M^{(r)}=0=N'=N''=\dots=N^{(r)}$, $P'=P''=\dots=P^{(r)}=0=Q'=Q''=\dots=Q^{(r)}$, रखने पर यह नाम प्रसाद के परिणाम^[2] में समानीत हो जाता है।

निर्देश

- (a) प्रसाद, वाई०एन० तथा सिंह, ए०के०, The Journal of Scientific Research 1979, 30(1), 51.
(b) वही, Istanbul Teknik Universities Bulteni, 1979, 32.
- सिंह, नाम प्रसाद, इण्डियन जर्न० प्योर एप्ला० मैथ०, 1980, 11(11), 1497.
- अनन्दानी, पी०, Kyungpook Math. J., 1976, 16, 183.
- एडेल्यो, ए०, Tables of Integral Transform, भाग II, मैकग्राहिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क 1954.
- शाह, एम०टी०, विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1973, 16, 47.
- स्नेडान, आई०एन०, Special functions of Mathematical Physics and Chemistry, ओलिवर तथा बॉयड लिमिटेड न्यूयार्क, 1956



Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 26, No. 2, 1983

फूरियर जैकोबी श्रेणी के चेजारो माध्यों के द्वारा सन्निकटन की कोटि

जे० पी० पोरवाल

माधव विज्ञान महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—अगस्त 23, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हम फूरियर जैकोबी श्रेणी के चेजारो माध्यों के द्वारा एक फलन के सन्निकटन कोटि पर एक प्रमेय सिद्ध करेंगे।

Abstract

Degree of approximation by Cesaro means of Fourier Jacobi series. By J. P. Porwal, Madhav Vigyan Mahavidyalaya, Ujjain.

In this paper we prove a theorem on the degree of approximation to a function by Cesaro means of Fourier Jacobi series. This result is a generalisation of a well-known theorem of Gupta (1962) for ultraspherical series.

1. परिभाषायें तथा संकेत

फलन $f(x) \in L[-1, +1]$ का फूरियर जैकोबी प्रसार

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (1.1)$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ

$$a_n = \frac{(2n + \alpha + \beta + 1)(n + 1)!(n + \alpha + \beta + 1)!}{2^{\alpha + \beta + 1}(n + 2 + 1)!(n + \beta + 1)!} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx$$

तथा $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ जैकोबी बहुपद हैं जिनकी कोटि $(\alpha, \beta), \alpha > -1, \beta > -1$ है।

अन्तिम बिन्दु $x=1$ पर श्रेणी (1.1) को n वां आंशिक योग निम्न द्वारा^[2] दिया जाता है

$$S_n(1) = 2^{\alpha+\beta+1} \lambda_n \int_0^\pi (\sin \phi/2)^{2\alpha+1} (\cos \phi/2)^{2\beta+1} f(\cos \phi) P_n^{(\alpha+1, \beta)}(\cos \phi) d\phi$$

फलतः
$$S_n(1) - A = 2^{\alpha+\beta+1} \lambda_n \int_0^\pi (\sin \phi/2)^{2\alpha+1} (\cos \phi/2)^{2\beta+1}$$

$$[f(\cos \phi) - A] P_n^{(\alpha+1, \beta)}(\cos \phi) d\phi \quad (1.2)$$

2. हाल ही में गुप्ता^[3] ने फूरियर लागेर श्रेणी के सन्निकटन की विवेचना की है। उन्होंने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की है

यदि
$$F(t) = \int_t^\delta \frac{|f(u)|}{u} du = O\left(\log \frac{1}{t}\right) \quad (2.1)$$

तथा
$$\int_t^\infty e^{-t/2} t^{\alpha-k-1/3} |f(t)| dt < \infty \quad (2.2)$$

तो
$$\sigma_n^k(0) = O(\log n) \text{ वगैरें कि } k > \alpha + 1/2$$

प्रमेय :—यदि

$$\int_t^\delta \frac{|\psi(\phi)|}{\phi} d\phi = O(\log 1/t) \quad (2.4)$$

तथा
$$\int_\delta^\pi \psi(\phi) (\cos \phi/2)^{\beta-1/2} d\phi = O(\log n), \quad (2.5)$$

δ स्थिर धन अचर $< \pi$ है

तो
$$\sigma_n(1) - A = O(\log n) \quad (2.6)$$

जहाँ $\alpha > -1/2, \beta \geq \alpha, \psi(\phi) = f(\cos \phi) - A$

सम्बन्ध $P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x)$ को ध्यान में रखते हुये बिन्दु $x = -1$ पर संगत प्रश्न को इसी प्रकार से हल किया जा सकता है। यह प्रमेय इससे पूर्व गुप्ता द्वारा प्राप्त^[1] फल का सार्वीकरण करती है।

3. इस प्रमेय की उपपत्ति के लिए हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।
प्रमेयिका 1^[5] : चूँकि α, β यादृच्छिक तथा वास्तविक और प्रायः स्थिर धन स्थिरांक है, तब

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = \begin{cases} \theta^{-\alpha-1/2} O(n^{-1/2}), & c/n \leq \theta \leq \pi/2 \\ O(n^\alpha), & 0 \leq \theta \leq c/n \end{cases} \quad (3.1)$$

प्रमेयिका 2^[6] : यदि $\alpha > -1, \beta > -1, c/n \leq \theta \leq \pi - c/n$

तो
$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = n^{-1/2} k(\theta) \left[\cos(N\theta + \gamma) + \frac{O(1)}{n \sin \theta} \right] \quad (3.2)$$

जहाँ
$$K(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\sin \theta/2)^{-\alpha-1/2} (\cos \theta/2)^{-\beta-1/2} \quad (3.3)$$

तथा
$$N = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \quad \gamma = -(a + 1/2)\pi/2 \quad (3.4)$$

प्रमेयिका 3. यदि

$$\int_t^\delta \frac{|\psi(\phi)|}{\phi} d\phi = O(\log 1/t)$$

तो
$$\int_t^\delta \phi^{\alpha-1/2} \psi(\phi) d\phi = O[t^{\alpha+1/2} \log 1/t] \quad (3.5)$$

अतः
$$\begin{aligned} \int_t^\pi \frac{F(\phi)}{\phi^{\alpha+3/2}} d\phi &= \int_t^\pi \frac{\psi(\phi)}{\phi^{\alpha+3/2}} \phi^{2\alpha+1} d\phi \\ &= \int_t^\pi \psi(\phi) \phi^{\alpha-1/2} d\phi \\ &= O[t^{\alpha+1/2} \log 1/t] \quad (3.5) \text{ से} \end{aligned}$$

अतः
$$\int_0^t |F(\phi)| d\phi = \int_0^t |\psi(\phi)| \phi^{2\alpha+1} d\phi = \int_0^t |\psi(\phi)| \phi^{\alpha-1/2} \phi^{\alpha+3/2} d\phi$$

[खण्डशः समाकलन द्वारा]

$$\begin{aligned} &= \left[\phi^{\alpha+3/2} \phi^{\alpha+1/2} \log 1/\phi \right]_0^t + O \left[\int \phi^{\alpha+1/2} \phi^{\alpha+1/2} \log 1/\phi d\phi \right] \\ &= O \left[\phi^{2\alpha+2} \log 1/\phi \right]_0^t + O \left[\int \phi^{2\alpha+1} \log 1/\phi d\phi \right] = O \left[t^{2\alpha+2} \log 1/t \right] \end{aligned}$$

प्रमेयिका 4. माना

$$N_n(\phi) = \frac{1}{(n+1)} \sum_0^n \lambda_m P_n^{(\alpha+1, \beta)}(\cos \phi) \quad (3.6)$$

जहाँ
$$\lambda_n = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{(a+1)!} \frac{(n+\alpha+\beta+2)!}{(n+\beta+1)!} \simeq \frac{2^{-\alpha-\beta-1} n^{\alpha+1}}{(a+1)!}$$

तो
$$0 \leq \phi \leq 1/n \text{ के लिए } |N_n(\phi)| = O(n^{2\alpha+2}) \quad (3.7)$$

उपपत्ति सरल है ।

प्रमेयिका 5. $1/n \leq \phi \leq \pi - 1/n$ के लिए

$$|N_n(\phi)| = O(n^{\alpha-1/2})(\sin\phi/2)^{-\alpha-5/2}(\cos\phi/2)^{-\beta-1/2} \\ + O(n^{\alpha-1/2})(\sin\phi/2)^{-\alpha-5/2}(\cos\phi/2)^{-\beta-3/2} \quad (3.8)$$

उपपत्ति सरल है ।

प्रमेयिका 6. $\pi - 1/n \leq \phi \leq \pi$ के लिए

$$|N_n(\phi)| = O(n^{\alpha+\beta+1}) \quad (3.9)$$

उपपत्ति सरल है ।

4. प्रमेय की उपपत्ति

(1.2) से हमें प्राप्त है कि

$$\sigma_n(1) - A = \frac{1}{(n+1)} 2^{\alpha+\beta+1} \sum_{m=0}^n \lambda_m \int_0^\pi (\sin\phi/2)^{2\alpha+1} \\ (\cos\phi/2)^{2\beta+1} \psi(\phi) P_m^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\phi) d\phi \\ = \int_0^\pi F(\phi) N_n(\phi) d\phi \\ = \int_0^{1/n} + \int_{1/n}^\delta + \int_\delta^{\pi-1/n} + \int_{\pi-1/n}^\pi = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \text{ माना}$$

जहाँ $F(\phi) = (\sin\phi/2)^{2\alpha+1} (\cos\phi/2)^{2\beta+1} \psi(\phi)$

तथा $N_n(\phi) = \frac{1}{n+1} 2^{\alpha+\beta+1} \sum_{m=0}^n \lambda_m P_m^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\phi), \quad \lambda_n \cong \frac{2^{-\alpha-\beta-1} n^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}$

अब $|I_1| = O(n^{2\alpha+2}) \int_0^{1/n} |F(\phi)| d\phi = O(\log n), \quad (3.7) \text{ से}$

पुनः परिणाम (3.8) का उपयोग करने पर

$$|I_2| = O(n^{\alpha+1/2}) \int_{1/n}^\delta (\sin\phi/2)^{\alpha-3/2} (\cos\phi/2)^{\beta+1/2} |\psi(\phi)| d\phi \\ = O(n^{\alpha-1/2}) \int_{1/n}^\delta \phi^{\alpha-3/2} |\psi(\phi)| d\phi$$

$$= O(n^{\alpha-1/2} \int_{1/n}^{\delta} \phi^{\alpha-1/2} \frac{|\psi(\phi)|}{\phi} d\phi = O(\log n), (2.5) \text{ से} \quad (4.3)$$

जब इस I_3 पर विचार करते हैं तो

$$|I_3| = O \left[\int_{\delta}^{\pi-1/n} n^{\alpha-1/2} |\psi(\phi)| (\sin \phi/2)^{\alpha-3/2} (\cos \phi/2)^{\beta+1/2} d\phi \right] \\ + O \left[\int_{\delta}^{\pi-1/n} n^{\alpha-1/2} |\psi(\phi)| (\sin \phi/2)^{\alpha-3/2} (\cos \phi/2)^{\beta-1/2} d\phi \right], (3.8) \text{ से}$$

$$= O \left[\int_{\delta}^{\pi-1/n} n^{\alpha-1/2} |\psi(\phi)| \cos \phi/2, (\cos \phi/2)^{\beta-1/2} d\phi \right] \\ = O(\log n) (2.5) \text{ से क्योंकि } \alpha < 1/2 \quad (4.4)$$

$$\text{अन्त में } |I_4| = \left| \int_{\pi-1/n}^{\pi} \psi(\phi) (\sin \phi/2)^{2\alpha+1} (\cos \phi/2)^{2\beta+1} N_n(\phi) d\phi \right| \\ = O(n^{\alpha+\beta+1}) \int_{\pi-1/n}^{\pi} |f(\cos \phi - A)| (\sin \phi/2)^{2\alpha+1} (\cos \phi/2)^{2\beta+1} d\phi, (3.8) \text{ से} \\ = O(n^{\alpha+\beta+1}) \int_0^{1/n} |f(-\cos \phi) - A| \phi^{\beta-1/2} \phi^{\beta+3/2} d\phi, \\ = O(\log n), (\text{संकल्पना से}) \quad (4.5)$$

(4.2) (4.3) (4.4) तथा (4.5) को संचित करने पर

$$\sigma_n(1) - A = O(\log n)$$

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई ।

निर्देश

1. गुप्ता, डी०पी०, Bull. Un. Mat. Ital. 1962, (3) 17, 166-171.
2. ओब्रेचकाफ, एस०, Annuaire 1 Univ. Sofia, Faculte Physic-Mathemati. 1936, 1, 39-133.
3. गुप्ता, डी०पी०, Acta Scientiarum Mathematicarum szeged 1971, 255-259.
4. जेगो०, जी०, Orthogonal Polynomials. अमे० मैथ० सोसा०, कोलोकि० पब्लि०, न्यूयार्क, 1959



कतिपय द्विसंयोजी धातुओं के 7-(α -सल्फोनैमिडो) मेथिल -8-हाइड्राक्सीक्विनोलीन संकुलों के स्थायित्व स्थिरांक

कमल के० चतुर्वेदी तथा कु० मनोरमा गोयल

रसायन विभाग, होल्कर साइंस कालेज, इन्दौर

[प्राप्त—अक्टूबर 8, 1982]

सारांश

Cu(II), Ni(II), Co(II) तथा Zn(II) के 7-(α -सल्फोनैमिडो)मेथिल -8-हाइड्राक्सी-क्विनोलीन संकुलों के स्थायित्व स्थिरांक ज्ञात किये गये हैं।

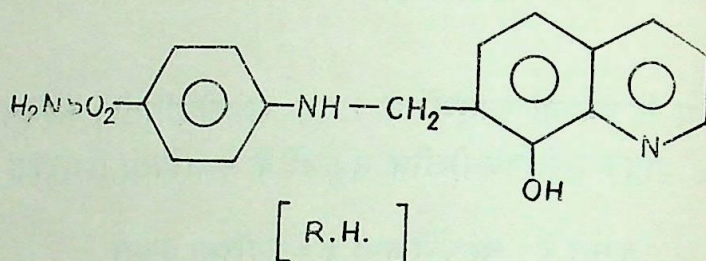
Abstract

Stability constants of 7-(α -sulphonamido) methyl -8-hydroxyquinoline complexes of a few bivalent metals. By Kamal K. Chaturvedi and Km. Manorama Goyal, Department of Chemistry, Holkar Science, Indore.

The stability constants of 7-(α -sulphonamido) methyl -8-hydroxyquinoline complexes of Copper (II), Nickel (II), Cobalt (II) and Zinc (II) were determined potentiometrically using a quinhydrone electrode at $(298.2 \pm 0.1^\circ \text{K})$ in (1:1) acetone-water at ionic strength $\mu=0.2$ adjusted by the addition of NaClO_4 . The successive formation constants K_1 and K_2 have been determined from experimental data employing Irving-Rossotti method. The order of stability for bivalent metal complexes is found to be $\text{Cu} > \text{Zn} > \text{Ni} > \text{Co}$ which is in agreement with Irving-Williams rule.

हमने अप पूर्व प्रपत्र^[1] में 7-(α -सल्फोनैमिडो) मेथिल -8-हाइड्राक्सीक्विनोलीन [R. H.] के निर्माण की सूचना दे चुके हैं। यहाँ हम [R. H.] के साथ Cu (II), Ni (II), Co (II) तथा Zn (II) के संकुलों के संभवन स्थिरांकों को सूचित कर रहे हैं। हमने $298.2 \pm 0.1^\circ \text{K}$ पर $\mu=0.2$ आयनी

सान्द्रता पर 1:1 (v/v) ऐसीटोन-जल माध्यम में अनुमापन प्रविधि^[2] का उपयोग किया है। पी-एच को NaClO_4 द्वारा समंजित किया गया।



प्रयोगात्मक

सभी रसायन वैश्लेषिक कोटि के थे। लिगेण्ड को पूर्ववर्णित विधि^[1] द्वारा तैयार किया गया। सभी विभवमापी अनुमापन विननहाइड्रोन इलेक्ट्रोड के प्रयोग द्वारा सम्पन्न हुए और नाइट्रोजन गैस के द्वारा अक्रिय वायुमण्डल बनाये रखा गया।

निम्नलिखित विलयन-समुच्चयों (कुल आयतन 40 मिली०) को मानक NaOH (0.05 M) द्वारा $298.2 \pm 0.1^\circ \text{K}$ पर ऐसीटोन-जल (1/1) मिश्रण में $\mu = 0.2$ आयनी सान्द्रता पर अनुमापित किया गया।

- (A) 2 मिली० 0.5 M HClO_4 .
- (B) A + 10 मिली० 0.01 M लिगेण्ड (R. H.)
- (C) B + 2.5 मिली० 0.88 M धातुलवण

परिणाम तथा विवेचना

चूँकि n के मान सदैव 1 से कम आते हैं अतः ऐसे लिगेण्ड में केवल प्रथम चरण का वियोजन होता है। धातु-लिगेण्ड अनुमापन-वक्र अकेले लिगेण्ड के अनुमापन-वक्र से विचलित हो गये और β के मान धातु आयन के लिए प्राप्त β के मानों से कम मिले। फलतः यह कल्पना की गई है कि धातु आयन के जलअपघटन की सम्भावना बहुत कम है। चूँकि प्रयुक्त विलयन अत्यन्त तनु थे अतः बहु-नाभिकीय संकुल के निर्माण की सम्भावना भी नगण्य है।

n_A , n तथा P_L इन संभवन स्थिरांकों के मानों का परिगणन इविंग तथा रोसोटी^[2] के व्यंजकों का प्रयोग करके किया गया। प्रोटोनीकरण स्थिरांक का परिगणन n_A के विरुद्ध पी एच को आरेखित करके किया गया। संभवन वक्रों को n के विरुद्ध P_L आलेखित करके प्राप्त किया गया। एक ही आयनी सान्द्रता ($\mu = 0.2$) पर क्रमवार संभवन स्थिरांकों के परिगणन के लिए न्यूनतम वर्ग विधि का उपयोग

किया गया। ये मान सारणी 1 में दिये हुए हैं और द्विसंयोजी धातु संकुलों के लिए इविंग-विलयम्स नियम^[5] के अनुरूप हैं : $\text{Cu} > \text{Zn} > \text{Ni} > \text{Co}$.

सारणी 1

	H	$\log K_1$	$\log K_2$	$\log \beta$
लिगेण्ड	7.34	—	—	—
ताम्र		6.52	4.84	11.36
जिंक		6.36	4.40	10.76
निकेल		6.10	4.05	10.15
कोबाल्ट		5.50	3.40	8.90

कृतज्ञता-ज्ञापन

एक लेखक (कु० मनोरमा गोयल) को इन्दौर विश्वविद्यालय से जे० आर० एफ० के रूप में आर्थिक सहायता प्राप्त हुई जिसके लिए लेखक आभारी हैं।

निर्देश

1. चतुर्वेदी, के० के० तथा गोयल, मनोरमा, जर्न० इण्डि० केमि० सोसा० (प्रकाशनाधीन)
2. इविंग, एच० तथा रोसोटी, एच० एस०, जर्न० केमि० सोसा०, 1954, 2904; 1953, 3379
3. इविंग, एच० तथा विलयम्स, जे० पी०, नेचर 1948, 162, 746.



मिश्रित अधिशोषक द्वारा आक्सैलिक अम्ल का विलगन

के० के० पाण्डेय, गुर प्रसाद तथा वी० एन० सिंह
सम्प्रयुक्त रसायन अनुभाग, इंस्टीट्यूट आफ टेक्नालाजी,
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त -- जनवरी 2, 1982]

सारांश

एकाकी अधिशोषक के स्थान पर मिश्रित अधिशोषक (फ्लाईऐश + वोलेस्टोनाइट 1:1) प्रयुक्त करने पर आक्सैलिक अम्ल का विलगन अधिक ढंग से हुआ। विलगन की गतिकी तथा विभिन्न समतापी रेखाओं की व्यवहार्यता की विवेचना की गई। पी०एच० 7.0 पर आक्सैलिक अम्ल का विशोषण नहीं होता जिससे पृष्ठ पर संकुल निर्माण की सूचना मिलती है।

Abstract

Oxalic acid removal by mixed adsorbent. By. K. K. Pandey, Gur Prasad and V. N. Singh, Applied Chemistry Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

Oxalic acid is one of the toxic constituents from wastes of dyeing, sugar refining and other related industries. Mixed adsorbent (fly ash + wollastonite; 1:1) has been used in place of single adsorbent for the removal of oxalic acid and better results have been achieved. The kinetics of removal and the applicability of various isotherms have been discussed. There is no desorption of oxalic acid at pH 7.0, indicating some complex formation on the surface of the mixed adsorbent which is further confirmed from i. r. studies.

आक्सैलिक अम्ल जल के प्राणियों के लिए विषैला है। इसकी घातक सांद्रता गोल्डफिश के लिए 1 ग्राम प्रति लीटर सूचित की गई है।^[2] आक्सैलिक अम्ल अनेक उद्योगों से प्राप्त होने वाला अवयव है यथा चर्म तथा कार्क, उद्योग, काष्ठ, लुगदी उत्पादन, चीनी परिष्करण आदि^[1]। कार्बनिक अपशिष्टों के वायवीय उपचार में आक्सैलोऐसीटिक अम्ल की महत्वपूर्ण भूमिका है।^[3]

जल उपचार तकनीकी में अधिशोषण प्रक्रम अत्यन्त लोकप्रिय बनता जा रहा है। किन्तु सक्रियकृत चारकोल का मूल्य विकासशील देशों के लिए समस्या बनता जा रहा है। इसी उद्देश्य से इस एक अधिशोषक के स्थान पर दो अधिशोषकों के मिश्रण के प्रयोग की दिशा में अग्रसर हो रहे हैं और प्रस्तुत अध्ययन में फ्लाइश (Flyash) तथा वोलेस्टोनाइट जैसे सस्ते अधिशोषक मिश्रण का उपयोग किया है।

प्रयोगात्मक

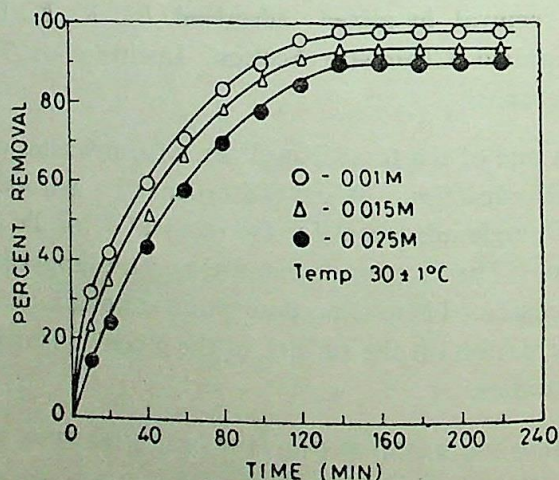
फ्लाइऐश हमें ओबराथर्मल पावर प्लांट (मिर्जापुर) से और वोलेस्टोनाइट वोल्केम प्राइवेट लिमिटेड, उदयपुर (राजस्थान) से प्राप्त हुए। इन दोनों अधिशोषकों को 534 चलनी से चालकर बिना किसी उपचार के प्रयोग में लाया गया। इन दोनों अधिशोषकों की 1:1 सामग्री मिश्रण की 1 ग्राम मात्रा बन्द पालीथीन बोतलों में लेकर वांछित सान्द्रताओं वाले 20 मिली० आक्सैलिक अम्ल विलयन के साथ ताप-स्थापी में 3.0 पी० एच० और 30° से पर 125 चक्र प्रति मिनट की दर से हिलाया गया। अधिशोषण प्रगति का अध्ययन संतृप्ति तक नियमित कालान्तरों पर किया गया। छनित में अम्ल की मात्रा अनुमापन द्वारा ज्ञात की गई।

विशोषण का अध्ययन आसुत जल का प्रयोग करते हुए पी० एच० 7.0 तथा 10.0 पर किया गया।

मिश्रित अधिशोषकों के अवरक्त स्पेक्ट्रम (i.r.) का लेखन अधिशोषण के पहले और फिर बाद में किया गया। इसके लिए पर्किन एलमर स्पेक्ट्रोमीटर (मॉडल 721) प्रयुक्त किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

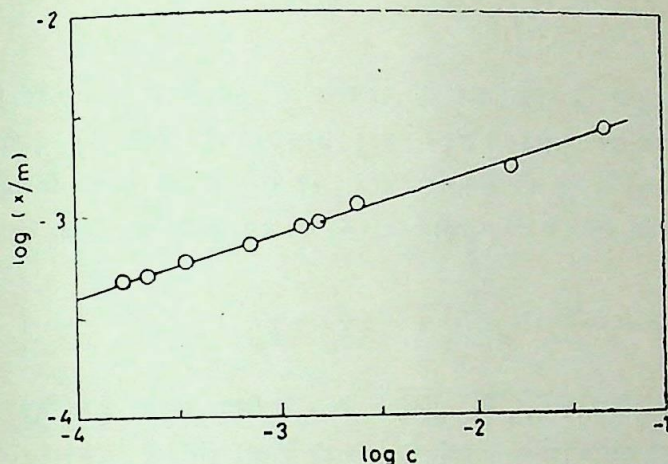
अधिशोषकों के रासायनिक विश्लेषण (सारणी 1) से पता चलता है कि फ्लाइऐश में कुल्ल्यात सिलिका तथा ऐल्यूमिना रहता है जबकि वोलेस्टोनाइट में सिलिका तथा कैल्सियम अक्साइड प्रमुख अवयव हैं। अधिशोषण इन्हीं अक्साइडों के पृष्ठों पर होता है। विभिन्न सान्द्रताओं पर आक्सैलिक अम्ल के विलगन



चित्र 1

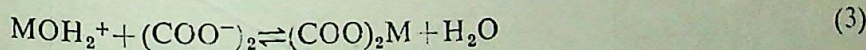
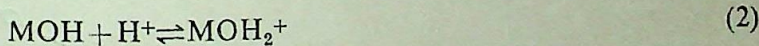
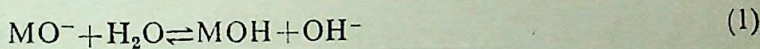
की गतिकी बताती है कि यह विलगन प्रारम्भ में क्षिप्त होता है और धीरे-धीरे घटता जाता है (चित्र 1)। तनुता के साथ ही प्रतिशत विलगन बढ़ता जाता है (चित्र 1)। ये वक्र एकाकी, सरल तथा संतत हैं और

140 मिनट में संतृप्तता आ जाती है जिससे 0.01M सान्द्रता पर अधिकतम विलगन 98% होता है। एकाकी अधिशोषकों की तुलना में^[4] मिश्रित अधिशोषकों द्वारा अधिशोषित (विलगित) आक्सैलिक अम्ल की



चित्र 2

प्रतिशतता अधिक होती है। अधिशोषण पृष्ठ हाइड्रॉक्सिलीकरण की गतिकी द्वारा नियन्त्रित होता है^[5] जिससे न्यून पी० एच० आक्साइड-विलयन के अन्तरापृष्ठ पर घन आवेश बनता है। आक्सैलिक अम्ल अधिशोषण की क्रियाविधि को इस प्रकार लिखा जा सकता है।



फ्रयूण्डलिक समतापी को लागैरिथ्मी रूप में निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,।

$$\log(x/m) = 1/n \log c + \log k_f \quad (4)$$

जहाँ x/m प्रति ग्राम मिश्रित अधिशोषक द्वारा अधिशोषित आक्सैलिक अम्ल की मात्रा है, c , साम्यावस्था सान्द्रता है आक्सैलिक अम्ल की तथा $1/n$ तथा k_f आनुभाविक स्थिरांक हैं जिन्हें फ्रयूण्डलिक स्थिरांक कहते हैं। साम्यावस्था पर अधिशोषित मात्रा तथा साम्यावस्था सान्द्रता के मध्य खींचे गये लाग-लाग आरेखों से k_f तथा $1/n$ के मान क्रमशः 6.31×10^{-5} तथा 0.33 आते हैं। चूँकि $n > 1$ अतः अनु-कूल अधिशोषण होता है ^[5]।

लांगमूर समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है ।

$$\frac{c}{(x/m)} = \frac{1}{k_1 k_2} + \frac{c}{k_2} \quad (5)$$

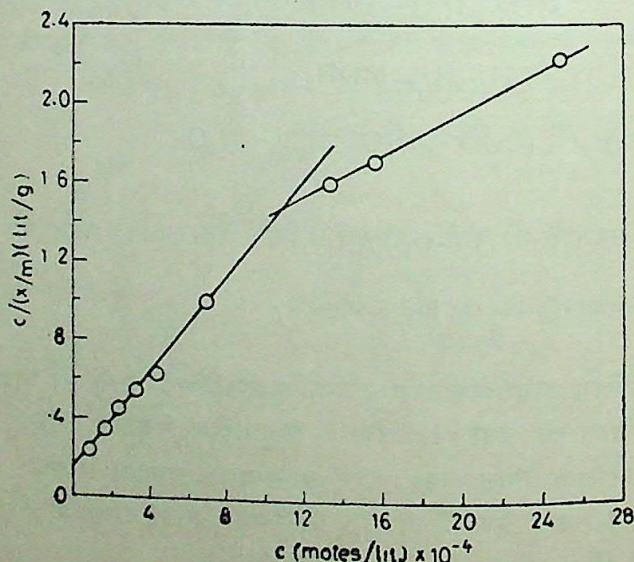
जहाँ k_1 बन्धन ऊर्जा तथा k_2 अधिशोषण से उच्चिष्ठ से सम्बन्धित है । c के विपक्ष $c/(x/m)$ को आलेखित करने पर एक की बजाय दो सरल रेखायें प्राप्त होती हैं (चित्र 3) जिससे पता चलता है कि अधिशोषण लांगमूर माडल से हट कर है । दो रेखाओं की प्राप्ति से यह सुझाव मिलता है कि अधिशोषणों की पृष्ठ पर दो प्रकार के स्थान हैं ^[6] । समीकरण (5) को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$\frac{c}{(x/m)} = \frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_1' k_1'} + c \left(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_2'} \right) \quad (6)$$

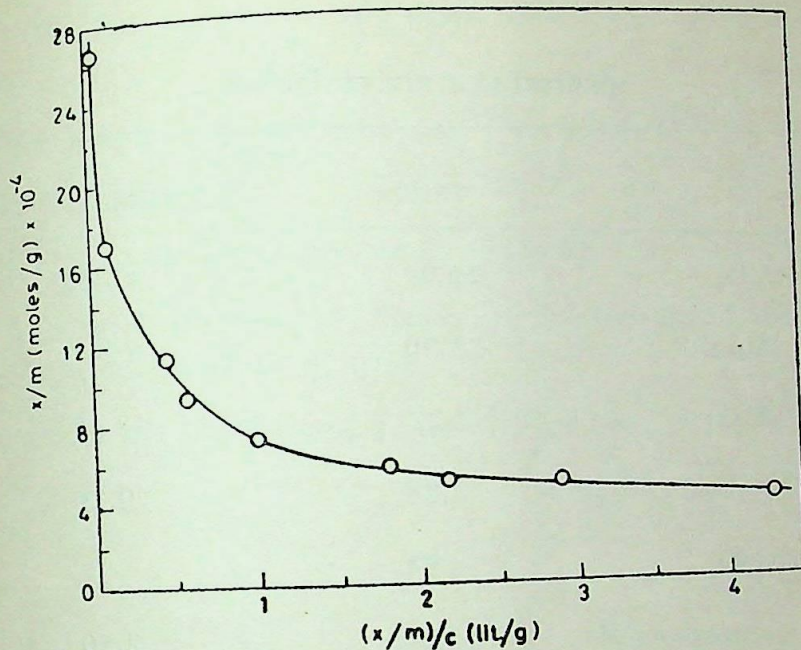
जहाँ k_1, k_2 प्रथम रेखा के और k_1', k_2' द्वितीय रेखा के लिए प्रयुक्त हैं (चित्र 3), एक से अधिक स्थलों की पुष्टि लांगमूर समीकरण को पुनर्व्यवस्थित करने से भी होती है

$$\frac{x}{m} = k_2 - \frac{(x/m)}{k_1 c} \quad (7)$$

(x/m) के विपक्ष $(x/m)/c$ का आलेख अरैखिक है (चित्र 4) जो हमारी आशा के अनुरूप है । k_2 तथा k_1', k_2' के मान आरेख से परिगणित करने पर क्रमशः 8.33×10^{-4} , 8.33×10^3 तथा 1.75×10^{-3} , 6.42×10^2 हैं ।



चित्र 3



चित्र 4

लांगमूर समतापी को विमाहीन स्थिर विलगन गुणक या साम्यावस्था प्राचल R के द्वारा भी व्यक्त कर सकते हैं जो लांगमूर स्थिरांक k_1 से निम्न प्रकार से सम्बन्धित है।

$$R = \frac{1}{1 + k_1 c_0} \quad (8)$$

जहाँ c_0 विलयन की प्रारम्भिक सान्द्रता है। यदि एक ही प्रणाली के लिए लांगमूर आलेख से दो स्थिरांक k_1 तथा k_1' प्राप्त हो तो समीकरण (8) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$$R = \frac{1}{1 + \left(\frac{k_1 + k_1'}{2} \right) c_0} \quad (9)$$

समीकरण (9) से R का जो मान प्राप्त होता है वह शून्य से अधिक किन्तु एक से कम है। इससे मिश्रित अधिशोषक द्वारा आक्सैलिक अम्ल के अनुकूल अधिशोषण की सूचना मिलती है।^[7]

पी० एच० 7.0 पर आक्सैलिक अम्ल का विश्लेषण नहीं होता जिससे अधिशोषण तथा अधिशोषक के मध्य कतिपय बलिष्ठ बन्धों का निर्माण सिद्ध होता है। इसकी पुष्टि मिश्रित अधिशोषक के *i.r.*

सारणी 1

अधिशोषकों का रासायनिक विश्लेषण

अवयव	प्रतिशत	
	फ्लाइऐश	बोलेस्टोनाइट
SiO ₂	56.04	48-52
Al ₂ O ₃	25.90	0.24
CaO	2.22	48.48
Fe ₂ O ₃	1.26	0.26
MgO	0.94	—
दहन करने पर धति	13.64	2.50

स्पेक्ट्रा से होती है। अधिशोषण के पञ्चात् 1620 तथा 1320 सेमी.⁻¹ पर दो नये बैंड प्रकट होते हैं जो कार्बोक्सिलेट समूह की उपस्थिति के सूचक हैं। आक्सैलिक अम्ल के *i.r.* स्पेक्ट्रा में 1690 सेमी.⁻¹ पर बैंड प्राप्त होता है जो कार्बोक्सिलिक अम्ल के कारण है। ऐसा प्रतीत होता है कि यह बैंड दो में टूट जाता है—1620 तथा 1320 cm^{-1} जिन्हें क्रमशः ν asym.(COO⁻) तथा ν sym (COO⁻) अंकित किया जाता है जिससे आक्सैलिक समूह की उपस्थिति सूचित है। $\Delta\nu$ 30 सेमी.⁻¹ निकलता है जिससे कार्बोक्सिलेट समूह का एकदंतुर आचरण सिद्ध होता है^[9]। इससे स्पष्ट हो जाता है कि आक्सैलिक समूह अधिशोषक के धातु आक्साइड से संकुल निर्माण करता है। पी० एच० 10 पर आक्सैलिक अम्ल का पूर्ण विशोषण हो जाता है अतः मिश्रित अधिशोषक का पुनः प्रयोग हो सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से एक (के० के० पाण्डेय) कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च नई दिल्ली का छात्रवृत्ति प्रदान करने के लिए आभारी है।

निर्देश

1. एलिस, एम० एम०, Bull. U. Sur. Fish. 1930, 48, 365.
2. लारेंस, टी०एफ०, Industrial Toxicology, द्वितीय संस्करण, हैफनर पब्लिशिंग कम्पनी, 1980 पृष्ठ 311.
3. सिम्पसन, जे० आर०, Water Treatment, Proc. 2nd Symp. on the Treatment of Waste water. Pergamon Press, 1960, 7.

4. जैन० के० के०, सिंह, वी० एन० तथा प्रसाद जी०, J. Chem. Tech. Biotechnol., 1979, 29, 36.
5. वही, Proc. 7th International Clay Conf., Italy, 1980, 137.
6. वही, Indian J. Chem.
7. मके, जी०, J. Chem. Tech. Biotechnol., 1982, 32, 759
8. डायर जे० आर०, Application of Absorption Spectroscopy of Organic Compounds (Prentice-Hall Inc.), 1965.
9. जेफरी, जी० ए० तथा पैरी, जी० एस०, J. Amer. Chem. Soc., 1954, 76, 5253.



व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी की गुणनफल संकलनीयता

एम० पी० सच्चान तथा पी० डी० कैथल

गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, शहडोल

[प्राप्त—अगस्त 28, 1982]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य शर्मा द्वारा प्राप्त प्रमेय A के परिणाम को व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी में विस्तार देना है।

Abstract

On the product summability of the derived Fourier series. By M. P. Sachan and D. P. Kathal, Department of Mathematics, Government College, Shahdol.

The object of this note is to extend the result of a theorem A due to Sharma to the derived Fourier series.

1. परिभाषाएँ तथा संकेत

माना $T = \{\lambda_{n,k}\}$, $n, k = 0, 1, 2$, एक त्रिकोणीय मैट्रिक्स (अर्थात् $\lambda_{n,k} = 0$, क्योंकि $k > n$), जिससे नियमितता के सिल्वरमैन-टोप्लिट्ज प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।^[1]

अनन्त श्रेणी $\sum u_n$ जिसके आंशिक योग S_n हैं s तक संकलनीय $(T)(C, 1)$ कहलाती है यदि

$$\sum_{k=0}^n (\lambda_{n,k}) \sigma_k \rightarrow S \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

जहाँ σ_n से S_n के रूपांतरण $(C, 1)$ का सूचन होता है।

माना कि x के फलन $f(x)$ की फूरियर श्रेणी जो लेबेस्क रूप में $(-\pi, \pi)$ तक समाकलनीय है और आवर्त 2π के साथ आवर्ती है, निम्न प्रकार है :—

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1.2)$$

फूरियर श्रेणी (1.2) की व्युत्पन्न श्रेणी है

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx) \equiv \sum_1^{\infty} nB_n(x).$$

अनुक्रम $\{nB_n(x)\}$ को फूरियर गुणांकों का अनुक्रम कहा जाता है।

हम स्थिर वास्तविक संख्या x के लिए निम्नलिखित संकेतनों का उपयोग करेंगे—

$$\psi(t) = f(x+t) - f(x-t),$$

$$g(t) = \psi(t)/(4 \sin t/2),$$

$$h_k(t) = \left\{ \frac{2(1 - \cos kt)}{kt^2} + \frac{\sin kt}{kt} - \frac{\sin kt}{t} \right\}.$$

$$D_k(t) = \frac{\sin kt}{t}$$

$$K_k(t) = D_1(t) + D_2(t) + \dots + D_k(t).$$

2. प्रस्तावना

फूरियर गुणांकों के अनुक्रम को मैट्रिक्स संकलनीयता से सम्बद्ध निम्नलिखित परिणाम शर्मा^[1] के हैं।

प्रमेय A. यदि $\psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t) - l$ के लिए

$$\psi_x(t) \equiv \int_0^t |\psi_x(t)| dt = O\left(\frac{t}{\log 1/t}\right), \text{ ज्यों-ज्यों } t \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

तथा कुछ r के लिए $0 < r < 1$ सहित

$$\sum_{k=0}^n k^r |(\lambda_{n,k} - \lambda_{n,k+1})| = O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

तो अनुक्रम $\{nB_n(x)\}$ l/π तक संकलनीय $(T)(C, 1)$ है।

हाल ही में लेखकों^[3] ने व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी की गुणनफल संकलनीयता $(E, q)(C, 1)$ का अध्ययन किया है। प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य उपर्युक्त प्रमेय A को व्युत्पन्न श्रेणी तक यह सिद्ध करके प्रसारित करना है कि

प्रमेय. यदि

$$G(t) \equiv \int_0^t |g(t)| dt = O\left(\frac{t}{\log 1/t}\right), \text{ ज्यों ज्यों } t \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

तथा किसी r के लिए $0 < r < 1$ सहित

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^r |(\lambda_{n,k} - \lambda_{n,k+1})| = O(1), \text{ ज्यों ज्यों } n \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

तो व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी x बिन्दु पर शून्य तक संकलनीय $(T)(C, 1)$ है।

3. आकल

हमें निम्नलिखित आकलों की आवश्यकता होगी जिनकी सम्पुष्टि सरलता से की जा सकती है

$$|h_k(t)| = O(k^2 t) = O(k), \text{ क्योंकि } 0 < t < 1/k. \quad (3.1)$$

$$= O(1/t), \text{ क्योंकि } t > 1/k. \quad (3.2)$$

$$k_k(t) = k_{k-1}(t) + D_k(t) = \frac{\sin(k+1)t/2 \sin kt/2}{t \sin t/2}. \quad (3.3)$$

$$|k_k(t)| = O(1/t^2), \text{ क्योंकि } t > 1/k. \quad (3.4)$$

4. हमें आगे निम्नलिखित प्रमेयिका की आवश्यकता होगी :

प्रमेयिका: यदि $f(t)$ संकलनीय (L) हो तथा δ कोई धनात्मक वास्तविक संख्या हो जो π से कम है तो व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी (1.3) का n वाँ आंशिक योग S_n का $(C, 1)$ रूपान्तर σ_n निम्न प्रकार लिखा जाता है।

$$\sigma_n = 2/\pi \int_0^\delta g(t) \left\{ \frac{2(1 - \cos nt)}{nt^2} + \frac{\sin nt}{nt} - \frac{\sin nt}{t} \right\} dt + O(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

उपपत्ति : इसकी उपपत्ति लेखकों^[3] ने दी है जो पूर्णता की दृष्टि से यहाँ दी जा रही है।

व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी (1.3) का n वाँ आंशिक योग S_n निम्न प्रकार है

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi(t) \sum_{k=1}^n (k \sin kt) dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi(t) \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right\} dt \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi(t) \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\sin (n + \frac{1}{2})t}{2 \sin t/2} \right\} dt \end{aligned}$$

अब चूँकि $g(t)$ समाकलनीय (L) है और δ स्थिर, धन तथा π से कम है अतः S_n का (C, 1) रूपान्तर σ_n निम्न प्रकार से प्राप्त किया जाता है

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -\frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \psi(t) \left[\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\sin (k + \frac{1}{2})t}{2 \sin t/2} \right\} dt \right] \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \psi(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4 \sin^2 t/2} \sum_{k=0}^n \{ \cos kt - \cos (k+1)t \} \right] dt \\ &= -\frac{1}{4n\pi} \int_0^\pi \psi(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{\cos t - \cos (n+1)t}{\sin^2 (t/2)} \right] dt \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_0^\pi g(t) \left[-\frac{\cos t/2}{\sin^2 t/2} + \frac{\cos t/2 \cos (n+1)t}{\sin^2 t/2} + \frac{(n+1) \sin (n+1)t}{\sin t/2} \right] dt \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi g(t) \left[\frac{\cos t/2}{\sin^2 t/2} - \frac{\cos (n+1)t}{\sin^2 t/2} - \frac{n \sin nt (1 - 2 \sin^2 t/2)}{\sin (t/2)} \right. \\ &\quad \left. - 2n \cos nt \cos t/2 \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(t) \left[\frac{\cos t/2 (1 - \cos nt)}{n \sin^2 t/2} + \frac{\sin nt}{n \sin t/2} - \frac{\sin nt}{\sin t/2} \right] dt \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(t) \cos (n + \frac{1}{2})t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta g(t) \left[\frac{\cos t/2 (1 - \cos nt)}{n \sin^2 t/2} + \frac{\sin nt}{n \sin t/2} - \frac{\sin nt}{\sin t/2} \right] dt + O(1) \quad (4.2) \end{aligned}$$

ज्यों-ज्यों $n \rightarrow \infty$, क्योंकि (4.2) में प्रथम समाकल का अंश (δ, π) में तथा द्वितीय समाकल प्रत्येक $O(1)$ है—(रीमान-लेबेस्क प्रमेय से)।

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\delta g(t) \left[\frac{2(1 - \cos nt)}{nt^2} + \frac{\sin nt}{nt} - \frac{\sin nt}{t} \right] dt + O(1)$$

ज्यों-ज्यों $n \rightarrow \infty$, जहाँ उपर्युक्त समाकल में अंतिम दो पद रीमान-लेबेस्क प्रमेय तथा प्रथम प्रमेय के हैं

क्योंकि

$$\frac{1}{n} \int_0^\delta g(t) (1 - \cos nt) \left[\frac{\cos t/2}{\sin^2 t/2} - \frac{4}{t^2} \right] dt$$

$$\leq \frac{2}{n} \int_0^\delta |g(t)| \left[\frac{1 - t^2/8}{t^2/4} - \frac{4}{t^2} \right] dt$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^\delta |g(t)| dt$$

$$= O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty, \int |g(t)| dt \text{ के सातत्य से।}$$

इस प्रकार प्रमेयिका की उपपत्ति पूर्ण हुई।

5. प्रमेय की उपपत्ति

(1.1) तथा प्रमेयिका (4.1) को व्यवहृत करने और σ_n के मैट्रिक्स रूपान्तरण को t_n द्वारा सूचित करने पर हमें मिलता है---

$$t_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n (\lambda_{n,k}) \int_0^\delta g(t) \left[\frac{2(1 - \cos kt)}{kt^2} + \frac{\sin kt}{kt} - \frac{\sin kt}{t} \right] dt + O(1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n (\lambda_{n,k}) \left[\int_0^{1/k} + \int_{1/k}^{1/kr} + \int_{1/kr}^\delta \right] g(t) h_k(t) dt + O(1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n (\lambda_{n,k}) [P_k + Q_k + R_k] + O(1), \text{ माना।}$$

$$= \frac{2}{\pi} (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) + O(1), \text{ माना,} \quad (5.1)$$

जहाँ δ इस प्रकार से चुना जाता है कि (2.3) $t < \delta$ ([4], § 13.34, p. 415) तथा $0 < r < 1$ के लिए सही हो।

(3.1) तथा (2.3) के प्रयोग से हमें

$$\begin{aligned} |P_k| &= \int_0^{1/k} |g(t)| O(k) dt \\ &= O(1). \end{aligned}$$

प्राप्त होता है। (3.2) तथा (2.3) के प्रयोग से तथा खण्डशः समाकलित करने पर

$$\begin{aligned} |Q_k| &= \int_{1/k}^{1/k^r} |g(t)| O(1/t) dt \\ &= O \left[\left\{ G(t) \frac{1}{t} \right\}_{1/k}^{1/k^r} + \int_{1/k}^{1/k^r} G(t) \frac{1}{t^2} dt \right] \\ &= O(1) + O \left\{ \int_{1/k}^{1/k^r} \left(\frac{1}{t \log 1/t} \right) dt \right\} \\ &= O(1) + O\{\log(1/r)\} \\ &= O(1), \text{ चूँकि } 0 < r < 1. \end{aligned}$$

फलतः $\{P_k\}$ तथा $\{Q_k\}$ शून्य अनुक्रम है अतः संकलन की मैट्रिक विधि की नियमितता से

$$\tau_v = (1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty, v=1, 2 \text{ के लिए} \quad (5.2)$$

आगे हम लिखेंगे कि

$$\begin{aligned} R_k &= \int_{1/k}^{\delta} g(t) \left[\frac{2(1 - \cos kt)}{kt^2} + \frac{\sin kt}{kt} - \frac{\sin kt}{t} \right] dt \\ &= (R_k)_1 + (R_k)_2 - \int_{1/k}^{\delta} g(t) \frac{\sin kt}{t} dt, \text{ माना} \end{aligned} \quad (5.3)$$

आंशिक समाकलन तथा (2.3) से

$$\begin{aligned} |(R_k)_1| &= \frac{1}{k} \int_{1/k}^{\delta} |g(t)| O(1/t^2) dt \\ &= O\left(\frac{1}{k}\right) \left[\left\{ \frac{G(t)}{t^2} \right\}_{1/k}^{\delta} + 2 \int_{1/k}^{\delta} \frac{G(t)}{t^3} dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= O\left(\frac{1}{k}\right) \left[O\left(k^r - \frac{1}{\delta}\right) + O\left(k^r - \frac{1}{\delta}\right) \right] \\
 &= O(1), \text{ क्योंकि } r < 1.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

द्वितीय माध्य मान प्रमेय तथा रीमान-लेबेस्क प्रमेय को व्यवहृत करने पर हमें सरलता से प्राप्त होता है कि

$$(R_k)_2 = O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } k \rightarrow \infty. \tag{5.5}$$

अब, चूंकि δ स्थिर है अतः एक स्थिर घन संख्या N विद्यमान रहती है जिससे कि

$$\frac{1}{k} < \delta, \text{ क्योंकि } k \geq N \tag{5.6}$$

N तथा इसी प्रकार $(N-1)$ के स्थिर होने पर

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} |\lambda_{k,k}| = 0.$$

अतः हम देखते हैं कि मैट्रिक्स $\{b_{n,k}\}$ $b_{n,k} = 0$, क्योंकि $k = 1, 2, \dots, (N-1)$ तथा $b_{n,k} = \lambda_{n,k}$ अन्यत्र समतुल्य है मैट्रिक्स $\{\lambda_{n,k}\}$ के सहित। अतः यह कल्पना की जा सकती है कि

$$\lambda_{n,k} = 0, k = 1, 2, \dots, (N-1) \text{ के लिए} \tag{5.7}$$

अब (5.3), (5.4), (5.5), (5.6), (5.7), संकलन विधि की नियमितता तथा (3.3) के बल पर हम लिखते हैं कि

$$\begin{aligned}
 |\tau_3| &\leq O(1) + \left| \sum_{k=N}^n (\lambda_{n,k}) \int_{1/k}^{\delta} g(t) D_k(t) dt \right| \\
 &= \left| \sum_{k=N}^n (\lambda_{n,k}) \int_{1/k}^{\delta} g(t) \{k_k(t) - k_{k-1}(t)\} dt \right| + O(1) \\
 &\leq \left| \sum_{k=N}^{n-1} (\lambda_{n,k} - \lambda_{n,k+1}) \int_{1/k}^{\delta} g(t) k_k(t) dt \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{k=N+1}^n (\lambda_{n,k}) \int_{1/k}^{1/(k-1)} g(t) k_{k-1}(t) dt \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + |(\lambda_{n,n}) \int_{1/n}^{\delta} r g(t) k_n(t) dt| \\
 & + |(\lambda_{n,N}) \int_{1/N}^{\delta} r g(t) k_{N-1}(t) dt| + 0(1) \\
 & = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + 0(1), \text{ माना ।}
 \end{aligned}$$

(3.4), (2.3) का प्रयोग करने और $(R_k)_1$ के मूल्यांकन की ही तरह अग्रसर होकर हम प्राप्त करते हैं

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{1/k}^{\delta} r g(t) k_k(t) dt \right| &= \int_{1/k}^{\delta} |g(t)| O\left(\frac{1}{t^2}\right) dt \\
 &= O(k^r), \text{ ज्यों-ज्यों } k \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

अतः (5.8) तथा (2.4) से

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \sum_{k=N}^{n-1} |(\lambda_{n,k} - \lambda_{n,k+1})| O(k^r) \\
 &= O\left[\sum_{k=N}^{n-1} k^r |(\lambda_{n,k} - \lambda_{n,k+1})| \right] \\
 &= O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

पुनः (3.4) तथा (2.3) से और खण्डशः समाकलित करने पर

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \sum_{k=N+1}^n |(\lambda_{n,k})| \int_{1/k}^{1/(k-1)^r} |g(t)| O\left(\frac{1}{t^2}\right) dt \\
 &= \sum_{k=N+1}^n |(\lambda_{n,k})| O\left[\left\{ \frac{G(t)}{t^2} \right\}_{1/k}^{1/(k-1)^r} + 2 \int_{1/k}^{1/(k-1)^r} \frac{G(t)}{t^3} dt \right] \\
 &= \sum_{k=N+1}^n |(\lambda_{n,k})| O\{k^r - (k-1)^r\}
 \end{aligned}$$

$= O(1)$, ज्यों-ज्यों $n \rightarrow \infty$, $0 < r < 1$, के लिए क्योंकि $\{\lambda_{n,k}\}$ एक नियमित त्रिकोणीय मैट्रिक्स है तथा $\{k^r - (k-1)^r\}$ शून्य अनुक्रम है।

पुनः हम देखते हैं कि नियमितता प्रतिबन्ध, $\sum |\lambda_{n,k}| = O(1)$ तथा $\sum k^r |(\lambda_{n,k} - \lambda_{n,k+1})| = O(1)$ का अर्थ है कि

$$k^r(\lambda_{n,k}) = O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty. \quad (5.9)$$

(5.8) तथा (5.9) से

$$J_3 = O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty.$$

अन्त में चूँकि N स्थिर है, हमें समाकल $\int |g(t)| dt$ का सातत्य तथा मैट्रिक्स $\{\lambda_{n,k}\}$ की नियमितता प्राप्त होती है

$$J_4 = O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty.$$

इस प्रकार

$$|\tau_3| = O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty. \quad (5.10)$$

अन्त में (5.1), (5.2) तथा (5.10) से

$$t_n = O(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty.$$

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

टिप्पणी : यह भलीभाँति ज्ञात है कि $(\lambda_{n,k})$ के स्थान पर (i) $1/n$ (ii) $\frac{1}{(n-k+1)\log n}$

(iii) $(1-x)x^k$, $x \uparrow 1$ तथा (iv) $(1-x)^{\lambda+1} \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1, 2, \dots, k} x^k$ $(\lambda+k)$ $\lambda+1 > 0$ $x \uparrow 1$ रखने से मैट्रिक्स $\{\lambda_{n,k}\}$ क्रमशः $(C, 1)$; $(H, 1)$; ऐबेल तथा (A, λ) मैट्रिक्सों में समानीत हो जाता है जो प्रमेय के प्रतिबन्ध (2.4) को तुष्ट करता है जिसे हमने अभी सिद्ध किया है। फलतः हमारे प्रमेय से विशेषतः $(C, 1)$ $(C, 1)$; $(H, 1)$ $(C, 1)$; (A) $(C, 1)$ पर तथा व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी की संकलनीयताएँ (A, λ) $(C, 1)$ पर परिणाम मिलते हैं।

तो भी इन फलों की पृथक से उपपत्तियाँ ज्ञात करना रोचक होगा।

निर्देश

1. हार्डी, जी०एस०, *Divergent Series*, आक्सफोर्ड, 1949
2. शर्मा, पी०एल०, *Proc. Japan Acad* 1965, **41**, 1
3. सचान, एम०पी० तथा कैथल, पी०डी० (प्रेषित), *Pure and Applied Maths.* INSA, New Delhi
4. टिशमार्श, ई०सी० *The Theory of Functions*, आक्सफोर्ड 1961

मैट्रिक्स आर्गुमेंट का मैकराबर्ट का E -फलन

एच०एस० धामी

गणित विभाग, कुमायूँ यूनिवर्सिटी कैम्पस, अल्मोड़ा

[प्राप्त--जून 21, 1982]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में मैकराबर्ट के E फलन के लिए आवर्तन सम्बन्ध ज्ञात किए गए हैं।

Abstract

Macrobert's E -function of matrix argument. By H. S. Dhami, Department of Mathematics, Kumaun University Campus, Almora.

In the present paper an attempt has been made to investigate recurrence relations for MacRobert's E -function in matrix form. These relations have been obtained with the help of an integral for hypergeometric function evaluated in terms of E -function.

1. प्रस्तावना

E -फलन अत्यन्त महत्वपूर्ण है। यहाँ पर इस फलन के लिए मैट्रिक्स रूप में आवर्तन सम्बन्ध ज्ञात किये जावेंगे। सर्वप्रथम हर्ज^[5] ने धन निश्चित मैट्रिक्सों की ज्यामिति का उपयोग किया और हाइपर-ज्यामितीय फलनों को मैट्रिक्स रूप में व्यक्त किया। प्रस्तुत कार्य इसी दिशा में है। प्राप्त फल लैटिस पाइन्ट समस्याओं तथा अ-केन्द्रीय विघटित वितरणों के सिद्धान्त पर लागू हो सकता है।

2. सामान्य सूत्रीकरण

मैकराबर्ट^[4] ने E -फलन को व्हिटेकर के W -फलन के रूप में व्यक्त किया है जो इस प्रकार है

$$E(\frac{1}{2}-a-\beta, \frac{1}{2}-a+\beta : : z) = \{ \Gamma(\frac{1}{2}-a-\beta) \Gamma(\frac{1}{2}-a+\beta) z^{-a} e^{1/2z} W_{a,\beta}(z) \} \quad (2.1)$$

क्विटेकर का फलन एडेल्टी इत्यादि^[3] द्वारा निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया गया है

$$W_{\alpha, \beta}(z) = \left[\left\{ \Gamma(-2\beta) \frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \beta - \alpha; 1 + 2\beta; z\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta - \alpha\right)} e^{-1/2z} z^{\beta+1/2} \right\} \right. \\ \left. + \left\{ \Gamma(2\beta) \frac{{}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \beta - \alpha; 1 - 2\beta; z\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \beta - \alpha\right)} e^{-1/2z} z^{(1/2-\beta)} \right\} \right] \quad (2.2)$$

पुनः हर्ज^[1] ने मैट्रिक्स आगुमेंट के हाइपरज्यामितीय फलन को इस प्रकार व्यक्त किया है

$${}_1F_1(\alpha; \beta; z) = \left[\frac{\Gamma_m(\beta)}{(2i\pi)^a} \int_{\text{Re } Z = X_0 > 0} \{ \text{etr } Z (\det(E - WZ^{-1}))^{-\alpha} (\det Z)^{-\beta} dZ \} \right] \quad (2.3)$$

जहाँ यह समाकल $\text{Re } \beta > m$ समस्त α तथा समिश्र W के हेतु इस तरह अभिसारी है जिससे कि

$$\text{Re } W > \text{Re } Z, \text{Re } z = X_0 > 0.$$

इस प्रकार परिभाषित फलन समस्त α में W के प्रति समग्र है और $\text{Re } \beta > p-1$ में वैश्लेषिक है।

अन्त में हम (2.2) तथा (2.3) सम्बन्धों के द्वारा E -फलन को मैट्रिक्स रूप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$$E\left(\frac{1}{2} - \alpha - \beta, \frac{1}{2} - \alpha + \beta; : Z\right) = \left[\left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha + \beta\right) \Gamma(-2\beta) Z^{(1/2+\beta-\alpha)} \right. \right. \\ \left. \frac{\Gamma_m(1+2\beta)}{(2i\pi)^{1/2+\beta-\alpha}} \int_{\text{Re } Z = X_0 > 0} \text{etr } Z (\det(E - WZ^{-1}))^{-(1/2+\beta-\alpha)} (\det Z)^{-(1+2\beta)} dZ \right\} \\ \left. + \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha - \beta\right) \Gamma(2\beta) Z^{(1/2-\beta-\alpha)} \frac{\Gamma_m(1-2\beta)}{(2\pi i)^{1/2-\beta-\alpha}} \right. \right. \\ \left. \left. \int_{\text{Re } Z = X_0 > 0} \text{etr } Z (\det(E - WZ^{-1}))^{-(1/2-\beta-\alpha)} (\det Z)^{-(1-2\beta)} dZ \right\} \right] \quad (2.4)$$

जहाँ समाकल समस्त $\text{Re } (1 \pm 2\beta) > m$, समस्त $(\frac{1}{2} - \alpha \pm \beta)$ तथा समिश्र W के लिए इस प्रकार अभिसारी है कि $\text{Re } W > \text{Re } Z, \text{Re } Z = X_0 > 0$ । इस प्रकार से परिभाषित फलन सभी $(\frac{1}{2} - \alpha \pm \beta)$ में W में समग्र होगा और $\text{Re } (1 \pm 2\beta) > p-1$ में वैश्लेषिक होगा।

3. आवर्तन सम्बन्ध

हाइपरज्यामितीय फलन वाले कुछ समाकलों का मान E -फलन के पदों में ज्ञात किया गया है। एक महत्वपूर्ण सम्बन्ध जिसे मैकरावर्ट ने^[4] खोजा है इस प्रकार है

$$\int_0^\infty e^{-x\lambda} \lambda^{(\gamma-1)} {}_2F_1(a, \beta; \delta; -\lambda) d\lambda = \left\{ \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(a)} \frac{x^{-\gamma}}{\Gamma(\beta)} E(a, \beta, \gamma; \delta; x) \right\} \quad (3.1)$$

यदि $\operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} \gamma > 0$ ।

उपर्युक्त सम्बन्ध को मैट्रिक्स रूप में बदलने पर,

$$E(a, \beta, \gamma; \delta; x) = \left[\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(\delta)} \frac{\Gamma(\beta)}{x^{-\gamma}} \int_0^\infty e^{-x\lambda} \lambda^{(\gamma-1)} \frac{1}{\Gamma_m(a)} \int_{w>0} \left\{ \operatorname{etr}(-W) {}_1F_1(\beta; \delta; -W\lambda) (\det W)^{\alpha-p} dW \right\} d\lambda \right] \quad (3.2)$$

जहाँ $\operatorname{Re} a > p-1$.

निम्नलिखित अपचायक संकारक को सम्प्रयुक्त करने पर

$$D_w^\nu \{ \operatorname{etr}(-WZ) \} = (-1)^{m\nu} (\det Z)^\nu \operatorname{etr}(-WZ) \quad (3.3)$$

हमें निम्न में से एक की प्राप्ति होती है

$$D_w^\nu E(a, \beta, \gamma; \delta; x) = \left[\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(\delta)} \frac{\Gamma(\beta)}{x^{-\gamma}} \int_0^\infty e^{-x\lambda} \lambda^{(\gamma-1)} \frac{1}{\Gamma_m(a)} \int_{w>0} \operatorname{etr}(-W\lambda) D_w^\nu \{ \operatorname{etr}(-W) (\det W)^{\alpha-p} {}_1F_1(\beta; \delta; -W\lambda) dW \} d\lambda \right] \quad (3.4)$$

अथवा

$$D_w^\nu E(a, \beta, \gamma; \delta; x) = \left[\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(\delta)} \frac{\Gamma(\beta)}{x^{-\gamma}} \int_0^\infty \left\{ e^{-x\lambda} \lambda^{(\gamma-1)} \frac{1}{\Gamma_m(a)} (\det \lambda)^\nu \int_{w>0} \{ \operatorname{etr} - W(\lambda + E) (\det W)^{\alpha-p} {}_1F_1(\beta; \delta; -W\lambda) dW \} d\lambda \right\} d\lambda \right] \quad (3.5)$$

अब निम्नलिखित मैट्रिक्स सूत्र को व्यवहृत करने पर जो हर्ज^[1] द्वारा मैट्रिक्स रूप में दिया गया है

$$\int_{w>0} \operatorname{etr}(-WZ) {}_1F_1(a; \beta; W\lambda) (\det W)^{\alpha-p} dW = [\Gamma_m(\beta) \{ \det(E - \lambda Z^{-1}) \}^{-\alpha} (\det Z)^{-\beta}] \quad (3.6)$$

हमें नीचे दिये गये चार में से किसी एक फल की प्राप्ति होती है

$$D_w^\nu E(a, \beta, \gamma; \delta; x) = \left[\frac{\Gamma(a) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\delta) x^{-\gamma}} \int_0^x e^{-x\lambda} \lambda^{(\gamma-1)} \frac{\Gamma_m(\delta)}{\Gamma_m(a)} \right. \\ \left. (\det \lambda)^\nu \det (E + \lambda)^{-\delta} (\det (E) - (E + \lambda)^{-1})^{-\beta} d\lambda \right] \quad (3.7)$$

अथवा

$$D_w^\nu E(a, \beta, \gamma; \delta; x) = \left[\frac{\Gamma(a) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\delta) x^{-\gamma}} \int_0^x e^{-x\lambda} \lambda^{(\gamma-1)} \frac{\Gamma_m(\delta)}{\Gamma_m(a)} \right. \\ \left. (\det \lambda)^{-\beta+\nu} (\det (E + \lambda))^{\beta-\delta} d\lambda \right] \quad (3.8)$$

अथवा

$$D_w^\nu E(a, \beta, \gamma; \delta; x) = \left[\frac{\Gamma(a) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\delta) x^{-\gamma}} \int_0^\infty e^{-x\lambda} \lambda^{(\gamma-1)} \frac{\Gamma_m(\delta)}{\Gamma_m(a)} \right. \\ \left. \{ \det (E + \lambda^{-1}) \}^{\beta-\delta} d\lambda \right] \quad (3.9)$$

अथवा

$$D_w^\nu E(a, \beta, \gamma; \delta; x) = \left[\frac{\Gamma(a) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\delta) x^{-\gamma}} \int_0^\infty e^{-x\lambda} \lambda^{(\gamma-1)} \frac{\Gamma_m(\delta)}{\Gamma_m(a) \Gamma_m(\delta - \nu)} \right. \\ \left. \int_{w>0} \{ \text{etr} (-W\lambda) \text{etr} (-W) {}_1F_1 (\beta - \nu; \delta - \nu; W\lambda) (\det W)^{\delta-\nu-p} dW \} d\lambda \right] \quad (3.10)$$

(3.4) तथा (3.10) की सहायता से लैप्लास परिवर्तन की अद्वितीयता के कारण निम्नलिखित सम्बन्ध प्राप्त होगा

$$D_w^\nu E(a, \beta, \gamma; \delta; x) = \left[\frac{\Gamma(a) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\delta) x^{-\gamma}} \int_0^\infty \left\{ e^{-x\gamma} \lambda^{(\gamma-1)} \frac{1}{\Gamma_m(a)} \right\} \right. \\ \left. D_w^\nu \int_{w>0} \{ \text{etr} (-W) (\det W)^{\alpha-p} {}_1F_1 (\beta; \delta; -W\lambda) dW \} d\lambda \right] \quad (3.11)$$

इस सम्बन्ध का इस प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$D_w^\nu E(a, \beta, \gamma; \delta; x) = \left[\frac{\Gamma(a) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\delta) x^{-\gamma}} \int_0^\infty e^{-x\lambda} \lambda^{(\gamma-1)} \frac{\Gamma_m(\delta)}{\Gamma_m(a) \Gamma_m(\delta - \nu)} \right. \\ \left. \int_{w<0} \text{etr} (-W) (\det W)^{\delta-p-p} {}_1F_1 (\beta - \nu; \delta - \nu; W\lambda) dW \} d\lambda \right] \quad (3.12)$$

जिसे निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है

$$D_w^\nu E(\alpha, \beta, \gamma; \delta; x) = \left[\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\delta)} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma_m(\alpha)} D_w^\nu \int_{w>0} \left\{ \text{etr}(-W) (\det W)^{\alpha-p} \right. \right. \\ \left. \frac{E(\beta; \beta+1 : : -W\lambda)}{\sum_{\beta, \beta+1-\delta} \frac{\Gamma(\beta+1) \Gamma(1-\delta)}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{(-W)^\alpha} \sum_{n=0}^\infty W^n \Gamma(\beta-n+1) dW \right\} d\lambda \Big] \\ = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\delta)} \int_0^\infty \frac{\Gamma_m(\delta)}{\Gamma_m(\alpha) \Gamma_m(\delta-\nu)} \int_{w>0} \left\{ \text{etr}(-W) (\det W)^{\delta-\nu-p} \right. \\ \left. \frac{E(\beta-\nu; \beta-\delta+1 : : W\lambda)}{\sum_{\beta-\nu, \beta-\delta+1} \frac{\Gamma(\beta-\nu+1) \Gamma(\nu-\delta+1)}{\Gamma(\beta-\nu)} \sum_{n=0}^\infty W^n \Gamma(\beta-\nu+n+1) dW \right\} d\lambda \Big] \quad (3.13)$$

लेखक^[2] ने एक पूर्ववर्ती शोधपत्र में निम्नलिखित सम्बन्ध की खोज की है

$$E(\alpha, \beta : : Zt) \left\{ \sum_{\alpha, \beta} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta-\alpha) \Gamma(\alpha) Z^\alpha \right. \\ \left. {}_1F_1(\alpha; \alpha-\beta+1; Zt) \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{Z^n \Gamma(\alpha-n+1)} \right\} \quad (3.14)$$

(3.12) को सहायता से उपर्युक्त सम्बन्ध से निम्नलिखित सम्बन्ध प्राप्त किया जा सकता है

$$\left[\int_0^\infty D_w^\nu \int_{w>0} \text{etr}(-W) (\det W)^{\alpha-p} \frac{E(\beta; \beta-\delta+1 : : -W\lambda)}{\sum_{\beta, \beta-\delta+1} \frac{\Gamma(\beta+1) \Gamma(1-\delta)}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{(-W)^\alpha} \right. \\ \left. \sum_{n=0}^\infty W^n \Gamma(\beta-n+1) dW \right\} d\lambda = \left[\int_0^\infty \frac{\Gamma_m(\delta)}{\Gamma_m(\delta-\nu)} \int_{w>0} \left\{ \text{etr}(-W) (\det W)^{\delta-\nu-p} \right. \right. \\ \left. \frac{E(\beta-\nu; \beta-\delta+1 : : W\lambda)}{\sum_{\beta-\nu, \beta-\delta+1} \frac{\Gamma(\beta-\nu+1) \Gamma(\nu-\delta+1)}{\Gamma(\beta-\nu)} \frac{1}{W^\alpha} \sum_{n=0}^\infty W^n \Gamma(\beta-\nu+n+1) dW \right\} d\lambda \Big] \quad (3.15)$$

4. विशिष्ट दशा

(3.10) में $\gamma=0$ रखने पर हमें एक उपयोगी सम्बन्ध मिलता है जिसको अन्य आवर्तन सम्बन्धों के प्राप्त किये जाने में व्यवहृत किया जा सकता है। यथा

$$D_w^\nu E(a, \beta, 0; \delta; x) = \left[\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(\delta)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\delta)} \int_0^\infty \left\{ e^{-x\lambda} \frac{\Gamma_m(\delta)}{\lambda \Gamma_m(a) \Gamma_m(\delta - \nu)} \right. \right. \\ \left. \left. \int_{w \geq 0} \text{etr}(-W\lambda) \text{etr}(-W) {}_1F_1(\beta - \nu; \delta - \nu; W\lambda) (\det W)^{\delta - \nu - p} dW \right\} d\lambda \right]$$

उपर्युक्त परिणामों को अ-केन्द्रीय विशद वितरणों के लिए प्रयुक्त किया जा सकता है।

इस प्रपत्र में प्रयुक्त संकेतनों के अभिप्राय इस प्रकार हैं

1. $\det W$ से W का डिटरमिनेंट सूचित होता है।
2. $\text{etr } W$ से e trace of a matrix W ।
3. $p = (m+1)/2$, जहाँ m मैट्रिक्स की कोटि है।
4. W एक वास्तविक m कोटि का संमित मैट्रिक्स है। इसकी धनात्मक निश्चित प्रकृति $W > 0$ होने से प्रदर्शित होती है। वास्तविक शब्द से मैट्रिक्स के वास्तविक तत्वों का बोध होता है।
5. Z एक $m \times m$, संमिश्र मैट्रिक्स है जिसका स्थिर वास्तविक अंश $\text{Re } Z = X_0 > 0$ ।
6. $\int_0^E dW$ समाकल है जो परिमाण dW , समस्त मैट्रिक्सों के अवकाश S_m में है जिससे कि $0 < W < E$ ।
7. $\int_{\text{Re } Z = X_0 > 0} dZ$ समाकल है जो परिमाण dZ के अनुसार समस्त मैट्रिक्स Z के अवकाश S_m में

$\text{Re } Z = X_0 > 0$ के साथ है।

निर्देश

1. हर्ज, सी०एस०, Ann. Math. 1955, 61, 474.
2. धामी, एच०एस० तथा जोशी, एम०सी०, Acta. Ciencia Indica, (स्वीकृत)
3. एडेल्यी, ए०, इत्यादि, Higher Transcendental functions, मैकग्राहिल भाग I, न्यूयार्क, 1953
4. मैकराबर्ट, टी० एम०, Functions of a Complex Variable, पंचम संस्करण, मैकमिलन लन्दन तथा सेंटमाटिन प्रेस, न्यूयार्क, 1950

माइजर परिवर्त के लिए एबेली प्रमेय

आर० एस० पाठक तथा आर० बी० राय

गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त — फरवरी 22, 1983]

सारांश

माइजर परिवर्त के लिए प्रारम्भिक तथा अन्तिम मान प्रमेय स्थापित किए गए हैं।

Abstract

Abeian theorems for Meijer transform. By R. S. Pathak and R. B. Rai,
Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

Initial and final value theorems for the Meijer transform

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-y|t|^2} W_{k+1/2, m}(yt) (yt)^{-k-1/2} f(t) dt,$$

where $W_{k+1/2, m}(t)$ is the Whittaker function, are established.

सीमान्त मान समस्याओं के हल करने में एबेली प्रमेयों का उपयोग सर्व विदित है। लेप्लास परिवर्त के लिए स्नेडान^[4] द्वारा तथा हँकेल परिवर्त एवं K-परिवर्त के लिए जेमानियन^[6] द्वारा एबेली प्रमेय दिये गये हैं। प्रस्तुत प्रपत्र में हम माइजर परिवर्त के लिए, एबेली प्रमेय प्रस्तुत करेंगे जिसमें लेप्लास तथा K-परिवर्तों के लिए एबेली प्रमेय ख़िशिष्ट दशाओं के रूप में सम्मिलित हैं।

एबेली प्रमेय

सर्वप्रथम हम माइजर परिवर्त के लिए प्रारम्भिक मान प्रमेय का उल्लेख करेंगे और सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 1

माना कि संमिश्र संख्याएं k तथा m और वास्तविक संख्याएं ξ इस तरह सीमित हैं कि $\xi > \operatorname{Re}(k \pm m) - 1$. माना कि $f(t)$ $0 < t < \infty$, पर माप्य फलन है जिससे कि किसी धन संख्या c के लिए $f(t) e^{-ct}$ $T < t < \infty$, ($T > 0$) रूप के प्रत्येक अन्तराल पर लेबेस्क समाकलनीय है।

कल्पना किया कि a एक ऐसी संमिश्र संख्या पाई जाती है जिससे कि

$$\lim_{t \rightarrow 0+} t^{-\xi} f(t) = a \quad (1)$$

$f(t)$ के माइजर परिवर्त $F(y)$ को

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-yt/2} W_{k+1/2, m}(yt) (yt)^{-k-1/2} f(t) dt, \quad (y > c) \quad (2)$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है जहाँ $W_{k+1/2, m}(yt)$ ह्विटेकर फलन है तो

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{\xi+1} F(y) = a G(k, m, \xi), \quad (3)$$

जहाँ

$$G(k, m, \xi) = \frac{\Gamma(m + \xi - k + 1) \Gamma(-m + \xi - k + 1)}{\Gamma(\xi - 2k + 1)} \quad (4)$$

उपपत्ति :

उल्लेखनीय है कि हमारी $f(t)$ की कल्पना से $y > c$ के लिए (2) का अभिसरण निश्चित है। अब [1, p. 407] से हमें

$$G(k, m, \xi) = \int_0^\infty z^{\xi-1/2-k} e^{-z/2} W_{k+1/2, m}(z) dz, \quad (5)$$

प्राप्त होता है जहाँ $\xi > \operatorname{Re}(k \pm m) - 1$.

फलस्वरूप $Z = yT$, ($0 < T < \infty$) रखने पर हम लिख सकते हैं

$$\begin{aligned} |y^{\xi+1} F(y) - a G(k, m, \xi)| &= |y^{\xi+1} \int_0^\infty e^{-yt/2} W_{k+1/2, m}(yt) (yt)^{-k-1/2} f(t) dt \\ &\quad - a \int_0^\infty z^{\xi-1/2-k} e^{-z/2} W_{k+1/2, m}(z) dz| \\ &= |y^{\xi+1} \int_0^\infty e^{-yt/2} W_{k+1/2, m}(yt) (yt)^{-k-1/2} f(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a \int_0^\infty (yt)^{\xi-1/2-k} e^{-yt/2} W_{k+1/2,m}(yt) d(yt) \\
& = \left| \int_0^\infty [t^{-\xi} f(t) - a] e^{-yt/2} W_{k+1/2,m}(yt) (yt)^{\xi-k-1/2} d(yt) \right| \\
& \leq \int_0^z |t^{-\xi} f(t) - a| |e^{-yt/2} (yt)^{\xi-k-1/2} W_{k+1/2,m}(yt)| d(yt) \\
& \quad + \int_z^\infty |t^{-\xi} f(t) - a| |e^{-yt/2} (yt)^{\xi-k-1/2} W_{k+1/2,m}(yt)| d(yt) \\
& < \int_0^\infty |z^{\xi-k-1/2} e^{-z/2} W_{k+1/2,m}(z) dz| \sup_{0 < t < T} |t^{-\xi} f(t) - a| \\
& \quad + y^{\xi+1} \int_T^\infty |f(t) - at^{\xi}| |(yt)^{-k-1/2} e^{-yt/2} W_{k+1/2,m}(yt)| dt \quad (6)
\end{aligned}$$

$W_{k+1/2,m}(z)$, ज्यों-ज्यों $z \rightarrow \infty$ के उपगामी आचरण से [5, p. 339], हमें $|W_{k+1/2,m}(z)| < Q e^{-z/2} z^{k+1/2}$, प्राप्त होता है जहाँ Q पर्याप्त बड़ा अचर है। अतः $y < c$ के लिए (6) के दाईं ओर के द्वितीय पद पर

$$y^{\xi+1} Q \int_0^\infty |f(t) - at^{\xi}| e^{-yt} dt \leq e^{(c-y)T} Q y^{\xi+1} \int_0^\infty |f(x) - at^{\xi}| e^{-ct} dt. \quad (7)$$

का प्रभाव पड़ता है। अब माना कि $\epsilon > 0$ दिया हुआ है। तो (6) के दाहिनी ओर का प्रथम पद y से स्वतन्त्र होने के कारण T को पर्याप्त लघु चुन कर $\epsilon/2$ से छोटा किया जा सकता है। तब (6) के दाहिनी ओर का द्वितीय पद समस्त दोर्घ y के लिए $\epsilon/2$ से छोटा होगा जैसा (7) से प्रकट है। इस तरह

$$|y^{\xi+1} F(y) - aG(k, m, \xi)| < \epsilon,$$

ϵ के यादृच्छिक होने से हमारा परिणाम सिद्ध हो जाता है।

$\xi = -\frac{1}{2}$ रखने तथा सम्बन्ध [1, p. 432] पर

$$W_{0,m}(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}} K_m(x/2) \quad (8)$$

को व्यवहृत करने पर हमें k -परिवर्त के लिए विख्यात प्रारम्भिक मान समस्या उपर्युक्त प्रमेय के उपप्रमेय के रूप में प्राप्त होती है।

AP 2

उपप्रमेय 1

संमिश्र संख्या m तथा वास्तविक संख्या ξ इतनी सीमित हैं कि $\xi > \pm \text{Rem} - 3/2$. माना कि $f(t)$ माप्य फलन है $0 < t < \infty$ पर जिससे कि किसी घन संख्या c के लिए $f(t) e^{ct}$ लेबेस्क संकलनीय है $T < t < \infty (T > 0)$ के प्रत्येक अन्तराल पर।

माना कि a एक ऐसी संमिश्र संख्या है जिससे

$$\lim_{t \rightarrow 0+} t^{-\xi} f(t) = a. \quad (9)$$

अन्त में हम

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-yt^{1/2}} (yt)^{1/2} K_m(yt/2) f(t) dt, \quad y > c, \quad (10)$$

लें तो

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{\xi+1} F(y) = a G_1(m, \xi),$$

$$\text{जहाँ } G_1(m, \xi) = \frac{\Gamma\left(m + \xi + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(-m + \xi + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\xi + 2)} \quad (11)$$

आगे $k = -m$ लेने तथा सम्बन्ध [1, p. 432]

$$W_{-m+1/2, m}(x) = x^{-m+1/2} \cdot e^{-x/2} \quad (12)$$

को प्रयुक्त करने पर हमें लैप्लास परिवर्त के लिए निम्नलिखित प्रारम्भिक मान प्रमेय प्राप्त होता है।

उपप्रमेय 2

माना कि ξ वास्तविक संख्या है जो -1 से बड़ी है। माना कि $f(t)$ माप्य फलन है $0 < t < \infty$ जिससे किसी घन संख्या c के लिए $f(t) e^{-ct}$ $T < t < \infty (T > 0)$ के प्रत्येक अन्तराल पर लेबेस्क समाकलनीय है। कल्पना किया कि संमिश्र संख्या a ऐसी है कि

$$\lim_{t \rightarrow 0+} t^{-\xi} f(t) = a. \quad (13)$$

माना

$$F(y) = \int_0^{\infty} e^{-yt} f(t) dt, \quad y > c \quad (14)$$

तो

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{\xi+1} F(y) = a G_2(\xi),$$

जहाँ

$$G_2(\xi) = \Gamma(\xi + 1). \quad (15)$$

अब हम माइजर परिवर्त के लिए अन्तिम मान प्रमेय को बतायेंगे और सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 2

माना $\xi > \operatorname{Re}(k \pm m) - 1$ तथा माना $f(t)$ माप्य फलन $0 < t < \infty$ पर है जिससे निम्नलिखित प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं :

(i) $0 < t < T$, ($T < \infty$) रूप के प्रत्येक अन्तराल पर $t^{-k \pm m} f(t)$ लेबेस्क समाकलनीय है।

(ii) a ऐसी संमिश्र संख्या है कि

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\xi} f(t) = a. \quad (16)$$

तो

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{\xi+1} F(y) = aG(k, m, \xi),$$

जहाँ $y \rightarrow 0+ F(y)$ समस्त $y > 0$ के लिए (2) द्वारा तथा $G(k, m, \xi)$ को (4) द्वारा परिभाषित किया जाता है।

उपपत्ति

(i) तथा (ii) प्रतिबन्धों एवं $W_{k,m}(z)$, ज्यों-ज्यों $z \rightarrow \infty$, के उपगामी आचरण से यह निश्चित है कि प्रत्येक $y > 0$ के लिए (2) परम अभिसारी है। पिछले प्रमेय की उपपत्ति की ही भाँति

$$|y^{\xi+1} F(y) - aG(k, m, \xi)| = |y^{\xi+1} \int_0^\infty e^{-yt/2} W_{k+1/2,m}(yt) (yt)^{-k-1/2} f(t) dt$$

$$- a \int_0^\infty z^{\xi-1/2-k} e^{-z/2} W_{k+1/2,m}(z) dz|$$

$$= |y^{\xi+1} \int_0^\infty e^{-yt/2} W_{k+1/2,m}(yt) y^{-k-1/2} t^{-k-1/2} f(t) dt$$

$$- a \int_0^\infty y^{\xi-1/2} t^{1-k\xi-k-1/2} e^{-yt/2} W_{k+1/2,m}(yt) d(yt)|$$

$$= \left| \int_0^\infty [t^{-\xi} f(t) - a] e^{-yt/2} W_{k+1/2,m}(yt) (yt)^{\xi-1/2-k} y dt \right|$$

$$\leq \int_0^T |t^{-\xi} f(t) - a| |e^{-yt/2} W_{k+1/2,m}(yt)^{\xi-1/2-k} y| dt$$

$$+ \int_T^\infty |t^{-\xi} f(t) - a| |e^{-yt/2} W_{k+1/2,m}(yt) (yt)^{\xi-1/2-k} y| dt$$

$$\leq y^{\xi+1/2-k} \int_0^T |e^{-y t/2} t^{\xi-1/2-k} W_{k+1/2,m}(y t)| |t^{-\xi} f(t) - a| dt \\ + \int_0^\infty |z^{\xi-1/2-k} W_{k+1/2,m}(z) e^{-z/2}| dz \sup_{T < t < \infty} |t^{-\xi} f(t) - a|$$

चूँकि $W_{k,m}(z) = O(z^{\pm m+1/2})$, ज्यों-ज्यों $z \rightarrow 0$, अतः हमें प्राप्त है :

$$|y^{\xi+1} F(y) - a G(k, m, \xi)| \leq C y^{\xi+1/2-k} \int_0^T |e^{-y t/2} t^{\xi-1/2-k} t^{-\xi}| \\ |f(t) - a t^\xi| (y t)^{\pm \operatorname{Re} m + 1/2} dt \\ + \int_0^\infty |z^{\xi-1/2-k} W_{k+1/2,m}(z) e^{-z/2}| dz \sup_{T < t < \infty} |t^{-\xi} f(t) - a| \\ \leq C y^{\xi+1 \pm \operatorname{Re}(m-k)} \int e^{-y t/2} t^{\operatorname{Re}(-k+m)} |f(t) - a t^\xi| dt \\ + \int_0^\infty |z^{\xi-1/2-k} W_{k+1/2,m}(z) e^{-z/2}| dz \sup_{T < t < \infty} |t^{-\xi} f(t) - a|. \quad (17)$$

उपर्युक्त असमिका में दाहिने पक्ष का द्वितीय पद y से स्वतन्त्र है और T को पर्याप्त विशाल चुनते हुए किसी दिए हुए ϵ पर यह $\epsilon/2$ से कम हो सकता है। इस तरह T को स्थिर करें।

उपर्युक्त असमिका में प्रथम पद भी अभिसारी है। चूँकि हमारी परिकल्पना से $\xi + \operatorname{Re}(-k \pm m) > -1$, अतः प्रथम पद को $\epsilon/2$ से कम बनाया जा सकता है यदि y को पर्याप्त लघु चुना जाय।

$k = -\frac{1}{2}$ लेने तथा सस्बन्ध (8) का उपयोग करने पर हमें k -परिवर्त के लिए निम्नलिखित विख्यात अन्तिम मान समस्या प्राप्त होती है।

उपप्रेम 3

माना $\xi > -3/2 \pm \operatorname{Re} m$, तथा $f(t)$ माप्य फलन है $0 < t < \infty$ पर, जिससे निम्नलिखित प्रतिबन्धों की तुष्टि होती है

(i) $0 < t < T (T < \infty)$ के प्रत्येक अन्तराल पर $t^{1/2 \pm m} f(t)$ लेबेस्क समाकलनीय है

(ii) a ऐसी संमिश्र संख्या है कि

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\xi} f(t) = a. \quad (18)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{\xi+1} F(y) = {}_a G_1(m, \xi) \quad (19)$$

तो

जहाँ $F(y)$ को (10) द्वारा तथा $G_1(m, \xi)$ को (11) द्वारा परिभाषित किया जाता है।

आगे भी $k = -m$ लेने तथा सम्बन्ध (13) का प्रयोग करने पर हमें लैप्लास परिवर्त के लिए निम्नलिखित अन्तिम मान समस्याएँ प्राप्त होती हैं।

उपप्रमेय 4

माना कि ξ वास्तविक संख्या है जो -1 से बड़ी है। माना कि $f(t)$ माप्य फलन है $0 < t < \infty$ पर जिससे निम्नलिखित प्रतिबन्धों की तुष्टि होती है :

(i) $0 < t < T$ ($T < \infty$), के प्रत्येक अन्तराल पर $f(t)$ लेबेस्क समाकलनीय है।

(ii) a ऐसा संमिश्र संख्या है जिससे कि

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\xi} f(t) = a. \quad (20)$$

तो

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{\xi+1} F(y) = {}_a G_2(\xi), \quad (21)$$

जहाँ $F(y)$ (14) द्वारा तथा $G_2(\xi)$ (15) द्वारा परिभाषित है।

निर्देश

1. एडेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग II, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1954.
2. माइजर, सी० एस०, Nederl. Akad. Wetench, Proc. Series A, 1941 44, 727.
3. पाठक, आर० एस० तथा पाण्डेय, जे० एन०, Math. Bull. vol. 1977, 20(3), 331.
4. स्नेडान, आई० एन०, Use of Integral transform, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1974.
5. ह्विटेकर, ई० टी०, तथा वाटसन, जी० एन०, A Course of Modern Analysis, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, चतुर्थ संस्करण, 1962.
6. जेमानियन, ए० एच०, STAM J. Appl. Math., 1966, 14, 1106.

वितरणीय सार्वीकृत A- परिवर्त का अध्ययन भाग-I

वी० के० चतुर्वेदी तथा ए० एन० गोयल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—जून 10, 1982]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में A-परिवर्त तथा इसके संमिश्र विलोम सूत्र का विस्तार वितरण की दृष्टि से किया गया है।

Abstract

A study of a distributional generalized A-transform-Part I. By V. K. Chaturvedi and A. N. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

In this paper we have extended the A-transform, and its complex inversion formula to the distributional sense.

1. प्रस्तावना

1.1. गौतम तथा गोयल^[3] द्वारा परिभाषित A-इस प्रकार है

$$A(x) \equiv A_{p,q}^{m,n} \left[x \left| \begin{matrix} ((a_p, a_p)) \\ ((b_q, \beta_q)) \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \phi(s) x^{-s} ds \quad (1.1.1)$$

$$\phi(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(a_j - a_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - b_j + \beta_j s)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(1 - a_j + a_j s) \prod_{j=1}^q \Gamma(b_j - \beta_j s)} \quad (1.1.2)$$

जहाँ

इसके बाद से (1.1.1) के वामपक्ष को $A(x)$ द्वारा सूचित किया जावेगा।

फलन $A(x)$ वैश्लेषिक फलन होता है यदि निम्नलिखित प्रतिबन्धों में से कम से कम एक प्रतिबन्ध पाया जाय

$$(i) \quad \xi=0, \quad \eta>0, \quad |\arg(\zeta x)| < \frac{1}{2}\pi\eta \quad (1.1.3)$$

$$(ii) \quad \xi=0=\eta, \quad \nu-\sigma\lambda < -1, \quad x>0. \quad (1.1.4)$$

$$\text{जहाँ} \quad \xi = \sum_1^p I(\alpha_j) - \sum_1^q I(\beta_j); \quad \zeta = \prod_1^p \alpha_j^{\alpha_j} \prod_1^q \beta_j^{-\beta_j}$$

$$\eta = \sum_1^m R(\alpha_j) - \sum_{m+1}^p R(\alpha_j) + \sum_1^n R(\beta_j) - \sum_{n+1}^q R(\beta_j);$$

$$\gamma = \sum_1^p R(\alpha_j) - \sum_1^q R(\beta_j) - \frac{1}{2}(p-q); \quad \lambda = \sum_1^p R(\alpha_j) - \sum_1^q R(\beta_j)$$

तथा $s=\sigma+it$ R के पथ पर है जल $|t| \rightarrow \infty$.

$$\text{आगे, } A(x) = O(|x|^\gamma) \text{ दीर्घ } x \text{ के लिए} \quad (1.1.5)$$

$$\text{जहाँ} \quad \xi=0, \quad \eta \geq 0 \text{ और } \gamma = \max \left\{ R \left(\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right) \right\}, \quad (j=1, \dots, m)$$

$$\text{तथा} \quad A(x) = O(|x|^\delta) \text{ लघु } x \text{ के लिए} \quad (1.1.6)$$

$$\text{जहाँ} \quad \xi=0, \quad \eta>0 \text{ तथा } \delta = \min \left\{ R \left(\frac{\beta_j-1}{\beta_j} \right) \right\}, \quad (j=1, \dots, n)$$

$$\text{तथा} \quad |\arg(\zeta x)| < \frac{1}{2}\pi\eta.$$

1.1. A-फलन के कतिपय गुण

(1.1.1) में दी गई A -फलन की परिभाषा से तथा चर में उपयुक्त परिवर्तन करके हम निम्नलिखित गुणों को सिद्ध करेंगे :

$$A(x) = A_{q,p}^{m,n} \left[\frac{1}{x} \left| \begin{array}{l} ((1-b_q, \beta_q)) \\ ((1-a_p, \alpha_p)) \end{array} \right. \right] \quad (1.1.7)$$

$$x^{-\sigma} A(x) = A_{p,q}^{m,n} \left[x \left| \begin{array}{l} ((a_p + \sigma\alpha_p, \alpha_p)) \\ ((b_q + \sigma\beta_q, \beta_q)) \end{array} \right. \right] \quad (1.1.8)$$

फूरियर मेलिन विलोमन प्रमेय^[6] तथा परिभाषा (1.1.1) का उपयोग करते हुए हम सिद्ध करेंगे कि

$$\int_0^\infty x^{s-1} A(x) dx = \frac{\prod_1^m \Gamma(a_j - a_j s) \prod_1^n \Gamma(1 - b_j + \beta_j s)}{\prod_{m+1}^p \Gamma(1 - a_j + a_j s) \prod_{n+1}^q \Gamma(b_j - \beta_j s)} \quad (1.1.9)$$

जहाँ (1.1.9) में आये समाकल को परम अभिसारी होना चाहिए।

यदि a_j, β_j को घन वास्तविक संख्याएँ मान लें तो परिभाषा (1.1.1) तथा फाक्स द्वारा दी गई H परिभाषा में चर में उपयुक्त परिवर्तन करने से हम सिद्ध करेंगे कि

$$A_{p,q}^{n,m} \left[x \left| \begin{matrix} ((1-a_p, a_p)) \\ ((1-b_q, \beta_q)) \end{matrix} \right. \right] = H_{p,q}^{m,n} \left[x \left| \begin{matrix} ((a_p, a_p)) \\ ((b_q, \beta_q)) \end{matrix} \right. \right] \quad (1.1.10)$$

1.2 A-फलन परिवर्त तथा इसका संमिश्र विलोमन

A-फलन परिवर्त को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है

$$\mathcal{A}(y) = y \int_0^\infty A(yx) f(x) dx \quad (1.2.1)$$

किन्तु (1.2.1) में समाकल को परम अभिसारी होना चाहिए तथा यदि

$$F(k) = \int_0^\infty y^{-k-1} \mathcal{A}(y) dy \quad (1.2.2)$$

$t^{k-1} f(t) \in L(0, \infty)$, $t=x$ के पार्श्व में $f(t)$ परिवर्द्ध विचरण वाला हो, तो

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{w \rightarrow \infty} \int_{\sigma-iw}^{\sigma+iw} \frac{\prod_1^p \Gamma(1-a_j - a_j k + a_j) \prod_1^n \Gamma(b_j + \beta_j k - \beta_j)}{\prod_1^m \Gamma(a_j + a_j k - a_j) \prod_1^n \Gamma(1-b_j - \beta_j k + \beta_j)} x^{-k} F(k) dk \quad (1.2.3)$$

A-फलन का संमिश्र विलोम है। जब भी

$$\left. \begin{aligned} \eta > 0, \xi = 0, |\arg(\xi y)| < \frac{1}{2}\pi\eta, R\left(\frac{a_j}{a_j} - k - 1\right) < 0 \quad (j=1, \dots, m) \\ R\left(\frac{b_j-1}{\beta_j} - k + 1\right) > 0, \quad (j=1, \dots, n) \end{aligned} \right\}$$

तो $|f(x)|$ का A -फलन परिवर्त विद्यमान होता है।

(1.2.4)

उपपत्ति : (1.2.2) में (1.2.1) का उपयोग करने तथा समाकलन के क्रम को बदलने पर, क्योंकि x -समाकल परम अभिसारी है वशर्ते कि $|f(x)|$ के A -परिवर्त का अस्तित्व हो और y -समाकल (1.2.4) के अन्तर्गत अभिसारी है तो (1.1.9) के साथ y -समाकल का मान निकालने और अन्त में मेलिन परिवर्त विलोमन प्रमेय^[6] का उपयोग करने पर हमें वांछित फल प्राप्त होता है।

1.3 विशिष्ट दशाएँ

(1.2.1) में (1.1.10) को व्यवहृत करते हुए m तथा n को परस्पर परिवर्तित करने, समस्त a_j तथा b_j को क्रमशः $(1-a_j)$ और $(1-b_j)$ से स्थानान्तरित करने पर हमें गुप्ता तथा मित्तल^[4] द्वारा परिभाषित H -फलन परिवर्त प्राप्त होता है। फलतः गुप्ता तथा मित्तल द्वारा दिये गये H -फलन की अन्य समस्त विशिष्ट दशाएँ A -परिवर्त की ही विशिष्ट दशाएँ हैं।

2. वितरण के अर्थ में A -परिवर्त का प्रसार

A -परिवर्त को वितरण के अर्थ में प्रसारित करने के लिए हम एक परीक्षण फलन को $(0, \infty)$ अवकाश में परिभाषित करते हैं जिसमें परिवर्त की अष्टि रहती है। संमिश्र विलोमन सूत्र भी वितरणों के लिए प्रसारित किया जाता है।

2.1 $H_{c,d}^{u,v}$ प्रकार के अवकाश तथा उनके द्वैत

माना कि I से विवृत सेट $0 < x < \infty$ सूचित होता है। $D(I)$ में I के समस्त मसृण फलन आ जाते हैं।

माना $\phi(x) \in D(I)$ तथा

$$L = \sup \{x : x \in \text{sup } P\phi\};$$

$$C_{1,1}^{u,v} = \sup |T_{c,d}(x)|^v \sum_{i=0}^1 g_i x^u D_x^i \phi |$$

जहाँ समस्त g_i चर हैं, u एक स्थिर धन वास्तविक संख्या है, v अशून्य संख्या है तथा

$$T_{c,d}(x) = \begin{cases} x^{vc} & 1 \leq x < \infty \\ x^{vd} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

अब $0 < x < 1$ तथा $1 = 0, 1, 2, \dots$ के लिए विचार करने पर

$$\begin{aligned}
 & | T_{c, d}(x) (v \times D_x)^1 \{x^u \phi(x)\} | \\
 &= | T_{c, d}(x) v^1 \sum_{i=0}^1 g_i x^{u+i} D_x^i \phi(x) | \\
 &\leq | T_{c, d}(x) v^1 \sum_{i=0}^1 g_i x^u D_x^i \phi(x) | \leq C_{1,1}^{u,v} \quad (2.1.1)
 \end{aligned}$$

पुनः $1 \leq x < \infty$ तथा $1=0, 1, 2, \dots$ के लिए विचार करने पर

$$| T_{c, d}(x) v^1 \sum_{i=0}^1 g_i x^{u+i} D_x^i \phi(x) | \leq L^1 C_{1,1}^{u,v} \quad (2.1.2)$$

(2.1.1) तथा (2.1.2) से हमें $0 < x < \infty$ के लिए निम्न फल प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}
 & | T_{c, d}(x) (v \times D_x)^1 \{x^u \phi(x)\} | \leq C_{1,1}^{u,v} + L^1 C_{1,1}^{u,v} \\
 &\leq C_{1,1}^{u,v} L_1^1, \quad 1 + L^1 = L_1^1 \text{ रखने पर} \\
 &\leq C_{1,1}^{u,v} \left(\frac{L_1^1}{B^{1/\epsilon}} \right)^1 B^{1/1\epsilon} \quad (2.1.3)
 \end{aligned}$$

जहाँ $\epsilon \geq 0$ तथा $1^{1/\epsilon} = 1$ रखने पर क्योंकि $1=0$, स्पष्ट है कि

$$\left(\frac{L_1}{B^{1/\epsilon}} \right) \leq 1 \quad \text{यदि} \quad 1 \geq \left(\frac{L_1}{B} \right)^{1/\epsilon}$$

यदि $[x]$ से गासियन संकेत सूचित हो जिससे सबसे बड़ा पूर्णांक प्रदर्शित हो जो x से बड़ा न हो तो हम

$$\begin{aligned}
 & 1_0 = \left[\left(\frac{L_1}{B} \right)^{1/\epsilon} \right] + 1 \quad \text{तथा} \\
 & C_{1,2}^{u,v} \triangleq \max \left\{ \frac{L_1}{B}, \left(\frac{L_1}{B^{2/\epsilon}} \right)^2, \dots, \left(\frac{L_1}{B^{1_0/\epsilon}} \right)^{1_0} \right\} \quad (2.1.4)
 \end{aligned}$$

को परिभाषित करते हैं। (2.1.3) तथा (2.1.4) से हमें निम्न फल मिलता है

$$| T_{c, d}(x) (v \times D_x)^1 \{x^u \phi(x)\} | \leq C_{1,1}^{u,v} \cdot C_{1,2}^{u,v} B^{1/1\epsilon}$$

$$\leq C_1^{u,v} B^1 1^{1\epsilon} \text{ यदि } C_{1,1}^{u,v} \cdot C_{1,2}^{u,v} = C_1^{u,v} \text{ रखें} \quad (2.1.5)$$

$H_{c,d}^{u,v}$ अवकाश है जिसमें फलन $\phi(x)$ हैं जो $0 < x < \infty$ को परिभाषित हैं जो $1=0,1,2,\dots$ के लिए मसृण है तथा

$$i_{c,d,1}^{u,v} \phi(x) = \sup_{0 < x < \infty} |T_{c,d}(x) (v \times D_x)^1 \{x^u \phi(x)\}|$$

$$\leq C_1^{u,v} B^1 1^{1\epsilon} \quad (2.1.6)$$

अचर B तथा $C_1^{u,v}$ परीक्षण फलन $\phi(x)$ पर आश्रित हैं। $H_{c,d}^{u,v}$ में टोपोलाजी का गुण विद्यमान है जो गणनीय प्रसामान्य $\{i_{c,d,1}^{u,v}\}_{1=0}^{\infty}$ से उत्पन्न है। इस तरह $H_{c,d}^{u,v}$ एक गणनीय बहुप्रसामान्य अवकाश है। अनुक्रम $\{\phi_r(x)\}_{r=1}^{\infty}$ का $H_{c,d}^{u,v}$ से $\phi(x)$ में अभिसरण परिभाषित किया जाता है यदि प्रत्येक $1=0, 1, 2, \dots$ $i_{c,d,1}^{u,v} (\phi_r(x) - \phi(x)) \rightarrow 0$ ज्यों-ज्यों $r \rightarrow \infty$

प्रमेय 2.1.1

$H_{c,d}^{u,v}$ फ्रेचट अवकाश है।

उपपत्ति : उपपत्ति सरल है अतः नहीं दी जा रही।

गणनीय यूनियन (संयोग) अवकाश

गणनीय यूनियन $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_{c,d}^{u,v} \in_i$ को गणनीय यूनियन अवकाश $H_{c,d}^{u,v}$ के रूप में परिभाषित

किया जाता है। चूँकि प्रत्येक पूर्ण है, अतः गणनीय यूनियन अवकाश $H_{c,d}^{u,v}$ भी पूर्ण है और इसमें $0 < x < \infty$ पर समस्त परीक्षण फलन $\phi(x)$ होते हैं जो मसृण है और

$$i_{c,d,1}^{u,v} \phi(x) = \sup_{0 < x < \infty} |T_{c,d}(x) (v \times D_x)^1 \{x^u \phi(x)\}| < \infty$$

माना कि $H_{c,d}^{u,v} \in$ तथा $H_{c,d}^{u,v}$ क्रमशः $H_{c,d}^{u,v} \in$ एवं $H_{c,d}^{u,v}$ के द्वैत अवकाश हैं। स्पष्ट है कि $D(I) \subset H_{c,d}^{u,v}$.

2.2. वितरणीय सार्वोक्त A-परिवर्त

प्रमेयिका 2.2.1

यदि I धन पूर्णांक हो तो

$$(\nu \times D_x)^1 \{x^x y A(yx)\} = \nu^1 x^u y A_{p+1, q+1}^{m+1, n}$$

$$\left[yx \mid \begin{array}{l} (1+u, 1), \dots, (1+u, 1), ((a_p, a_p)) \\ ((b_q, b_q), (u, 1), \dots, (u, 1)) \end{array} \right]$$

उपपत्ति : (1.1.1) परिभाषा तथा गणितीय आगम के प्रयोग से इस प्रकार प्राप्त गामा फलनों के गुणनफल में यत्किंचित अभिकलन से फल प्राप्त होता है।

प्रमेय 2.2.1

$y A(yx)$ का सम्बन्ध अवकाश $H_{c,d}^{u,v}$ से $\nu d + u + \delta_1 > 0$ तथा $\nu c + u + \gamma_1 < 0$ के लिए है

$$\delta_1 = \min \left\{ R \left(\frac{b_j - 1}{\beta_j} \right) (j=1, \dots, n); \right.$$

$$\left. \gamma_1 = \max \left\{ (1+u), R \left(\frac{a_j}{\alpha_j} \right) \right\} (j=1, \dots, m). \right.$$

उपपत्ति : इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए सिद्ध करना पर्याप्त होगा कि

$$\sup_{0 < x < c} |T_{c,d}(x) (\nu \times D_x)^1 \{x^u y A(xy)\}| \text{ परिवर्द्ध है।} \quad (2.2.1)$$

प्रमेयिका (2.2.1), का प्रयोग करने पर $0 < x < 1$ के लिए ज्यों-ज्यों $x \rightarrow 0$, (1.1.6) से (2.2.1)

$$\leq \sup_{0 < x < 1} |x^{\nu d} \nu^1 y x^u M_1 y^{\delta_1} x^{\delta_1}|, \text{ जहाँ } M_1 \text{ अचर है तथा } \xi=0, \eta>0, |\arg(\xi y x)| < \frac{1}{2}\pi\eta$$

(2.2.1) परिवर्द्ध है यदि $\nu d + u + \delta_1 > 0$.

पुनः (1.1.5) के उपयोग से हमें $x \rightarrow \infty$ के लिए (2.2.1) $\leq \sup_{1 < x < \infty} |x^{vc} v^1 y x^u M_2 y^{\gamma_1} x^{\gamma_1}|$, प्राप्त होता है जहाँ M_2 कोई अचर है तथा $\xi=0$, $\eta \geq 0$, γ_1 ऊपर दिया हुआ है। इस प्रकार $x \rightarrow \infty$

(2.2.1) परिवर्द्ध है यदि $vc+u+\gamma_1 < 0$.

प्रमेय सिद्ध हुई।

अब हम इस स्थिति में हैं कि फलन $f(x) \in H_{c,d}'^{u,v}$ के विरणीय सार्विकृत A -परिवर्तों को परिभाषित कर सकें जब $vd+u+\delta_1 > 0$ तथा $vc+u+\gamma_1 < 0$, क्योंकि स्थिर $y (0 < y < \infty)$ के लिए $\mathcal{A}(y) = \langle f(x), y A(yx) \rangle$

$\mathcal{A}(y)$ सुपरिभाषित है क्योंकि $f(x) \in H_{c,d}'^{u,v}$ तथा $y A(yx) \in H_{c,d}^{u,v}$.

2.3. वितरणीय समिश्र विलोमन सूत्र

प्रमेयिका 2.3.1

यदि $f(t) \in H_{c,d}'^{u,v}$, तो

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y^{-k-1} \langle f(t), y A(yt) \rangle dy \\ = \langle f(t), \int_0^\infty y^{-k-1} y A(yt) dy \rangle \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

प्रमेयिका 2.3.2

माना कि $\phi(x) \in D(I)$ तथा r एक स्थिर धन वास्तविक संख्या है। यदि $Q(k) = \int_0^\infty \phi(x) x^{-k} dx$ जहाँ $k = \sigma + iw$, σ स्थिर है बशर्ते कि $vc+u+\sigma-1 < 0$ तथा $f(t) \in H_{c,d}'^{u,v}$, तब

$$\int_{-r}^r \langle f(t), t^{k-1} \rangle Q(k) dw = \langle f(t), \int_{-r}^r t^{k-1} Q(k) dw \rangle \quad (2.3.2)$$

प्रमेयिका 2.3.3

यदि (i) $\phi(x) \in D(I)$, (ii) σ तथा r ऐसी वास्तविक संख्याएँ हैं कि $\sigma > 1$, तो

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\phi(x)}{t \log \left(\frac{t}{x} \right)} \left(\frac{t}{x} \right)^\sigma \sin \left(r \log \frac{t}{x} \right) \text{ अभिसारी होता है}$$

$H_{c,d}^{u,v}$ से $\phi(t)$ तक ज्यों-ज्यों $r \rightarrow \infty$.

प्रमेयिका 2.3.4

यदि $f(t) \in H_{c,d}^{u,v}$ तथा

$$R_1 = \frac{\prod_{m+1}^p \Gamma(1 - a_j - a_j k + a_j) \cdot \prod_{n+1}^q \Gamma(b_j + \beta_j k - \beta_j)}{\prod_1^m \Gamma(a_j + a_j k - a_j) \prod_1^n (1 - b_j - \beta_j k + \beta_j)}$$

$$\begin{aligned} \text{तो} \quad R_1 \int_0^\infty y^{-k-1} \langle f(t), y A(yx) \rangle dy &= \int_0^\infty t^{k-1} f(t) dt \\ &= \langle f(t), t^{k-1} \rangle \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

(2.3.1), (2.3.2) तथा (2.3.3) प्रमेयिकाओं की उपपत्तियाँ जेमानियन^[8,9] द्वारा दिये गये ऐसे ही परिणामों की उपपत्तियों की तरह विकसित की जा सकती हैं।

प्रमेयिका 2.3.4 की उपपत्ति

प्रमेयिका (2.3.1), को व्यवहृत करते हुए तथा समाकल अंश में चर को $yt=z$ रखकर परिवर्तित करते हैं और अन्त में (1.1.9) का प्रयोग करने से वांछित फल प्राप्त होता है।

प्रमेय 2.3.1

माना कि $f \in H_{c,d}^{u,v}$ तथा $\phi \in D(I)$ तो

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} R_1 x^{-k} F(k) dk, \phi(x) \right\rangle = \langle f, \phi \rangle \quad (2.3.4)$$

जहाँ $F(k) = \int_0^\infty y^{-k-1} \mathcal{A}(y) dy$, $k = \sigma + i\omega$ तथा σ स्थिर है वशर्ते कि $\sigma > 1$ तथा

$\nu c + u + \sigma - 1 < 0$, R_1 प्रमेयिका 2.3.4 की भाँति है।

उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} R_1 x^{-k} F(k) dk, \phi(x) \right\rangle \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} R_1 x^{-k} F(k) dk \phi(x) dx \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

समाकल को k से w तक बदलने के क्रम को परस्पर विनिमय करने पर जो वैध है तथा $F(k)$ एवं $\mathcal{A}(y)$ के मानों का उपयोग करने पर

$$(2.3.5) = \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r R_1 \int_0^\infty y^{-k-1} \langle f(t), y A(yt) \rangle dy \int_0^\infty x^{-k} \phi(x) dx dw$$

प्रमेयिका (2.3.4), के उपयोग से

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \langle f(t), t^{k-1} \rangle \int_0^\infty x^{-k} \phi(x) dx dw \quad (2.3.6)$$

प्रमेयिका (2.3.2) का (2.3.6) में उपयोग से

$$= \langle f(t), \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r t^{k-1} \int_0^\infty x^{-k} \phi(x) dx dw \rangle \quad (2.3.7)$$

(2.3.7) में समाकलन के क्रम को बदलने पर

$$= \langle f(t), \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \phi(x) \int_{-r}^r t^{k-1} x^{-k} dw dx \rangle \quad (2.3.8)$$

हम समाकल

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r t^{k-1} x^{-k} dw &= \int_{-r}^r \left(\frac{t}{x}\right)^\sigma t^{-1} \left(\frac{t}{x}\right)^{iw} dw \\ &= \int_{-r}^r \left(\frac{t}{x}\right)^\sigma t^{-1} e^{iw \log t/x} dw \\ &= 2 \left(\frac{t}{x}\right)^\sigma t^{-1} \left[\log \left(\frac{t}{x}\right) \right] \sin \left(r \log \frac{t}{x} \right) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

पर विचार करेंगे । समाकल के मानकों (2.3.9) में से (2.3.8) में रखने पर

$$(2.3.8) = \langle f(t), \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \phi(x) \left(\frac{t}{x}\right)^\sigma \sin \left(r \log \frac{t}{x} \right) \left[t \log \left(\frac{t}{x} \right) \right]^{-1} dx \rangle$$

प्रमेयिका (2.3.3) से (2.3.8) अभिसारी होता है $\langle f(t), \phi(t) \rangle$ ज्यों-ज्यों $r \rightarrow \infty$ में ।

अतः प्रमेय सिद्ध हुई ।

निर्देश

1. एपास्टॉल, टी० एम० Mathematical Analysis, Addition Wesley, Reading Mass, 1957.
2. एडेल्यी, ए० H. T. F. भाग I मैकग्राहिल बुक कम्पनी 1953.]
3. गौतम, जी०पी० तथा गोयल, ए० एन०, Indian Jour. Pure Appl. Math. 1981, 12(9).
4. गुप्ता के० सी० तथा मित्रल पी० के०, Jour. Austr. Math. Soc., 1970, XI, 142.
5. मथाई, ए०एम० तथा सक्सेना आर० के०, The H-functions with Applications in Statistics and other Disciplines. Wiley Eastern Ltd., 1977.
6. स्नेडान, आई० एन०, The Use of Integral Transforms. टाटा मैकग्राहिल, नई दिल्ली, 1979.
7. तिवारी, ए० के०, Indian Jour. Pure Appl. Math. 1980, 11(8), 1045.
8. जेमनियन, ए० एच०, Distribution Theory and Transform Analysis, मैकग्राहिल बुक कम्पनी न्यूयार्क, 1965.
9. वही, Generalized Integral Transformation. इंटर साइंस पब्लिशर्स, न्यूयार्क 1968.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 26, No. 4, 1983

H-फलन वाले समाकल

शान्ति एस० सोनी

गणित विभाग (प्रौढ शिक्षा), मांट्रियल, कनाडा

तथा

अर्जुन के० राठी

गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, दौसा (जयपुर)

[प्राप्त—अगस्त 25, 1982]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हाइपरज्यामितीय फलन तथा H -फलन वाले दो सान्त समाकलों का मूल्यांकन किया गया है। कतिपय विशिष्ट दशाएँ भी दी गई हैं।

Abstract

Integrals involving H -function. By Shanti S. Soni, P. S. B. G. M. Department (Adult Education), Montreal, Canada and Arjun K. Rathie, Department of Mathematics, Government College, Dausa, Jaipur.

In this paper two finite integrals involving hypergeometric function and the H -function have been evaluated. Few interesting particular cases have also been given.

1. प्रस्तावना

फाक्स^[2] द्वारा प्रवर्तित H -फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित एवं सूचित किया जावेगा

$$H_{q,p}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} 1(a_j, e_j)_p \\ 1(b_j, f_j)_q \end{matrix} \right. \right] = (2\pi i)^{-1} \int_L \theta(s) z^s ds, \quad (1.1)$$

जहाँ प्राचल इतने सीमित हैं कि H -फलन सार्थक है; L एक मेलिन-बार्नीज प्रकार का उपयुक्त कंटूर है तथा

$$\theta(s) = \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - f_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - e_j s) / \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + f_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - e_j s) \quad (1.2)$$

ब्राक्समा^[1] ने सिद्ध किया है कि (1.1) के दाहिनी ओर का समाकल परम अभिसारी होता है जब $\phi > 0$ तथा $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi\phi$ जहाँ

$$\phi = \sum_{j=1}^m f_j - \sum_{j=m+1}^q f_j + \sum_{j=1}^n e_j - \sum_{j=n+1}^p e_j \quad (1.3)$$

2. प्रमुख परिणाम

सर्वप्रथम हम हाइपरज्यामितीय फलनों वाले निम्नलिखित समाकलों को सिद्ध करेंगे। ये परिणाम नवीन प्रतीत होते हैं।

$$\int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\rho-1} [ax + b(1-x)]^{-2\rho} {}_2F_1 \left[a, \beta; \frac{1}{2}(a+\beta+1); \frac{ax}{ax+b(1-x)} \right] dx \\ = \frac{\pi \Gamma(\rho) \Gamma(1/2 + a/2 + \beta/2) \Gamma(1/2 - a/2 - \beta/2 + \rho)}{2^{2\rho-1} a^\rho b^\rho \Gamma(1/2 + a/2) \Gamma(1/2 + \beta/2) \Gamma(1/2 - a/2 + \rho) \Gamma(1/2 - \beta/2 + \rho)} \quad (2.1)$$

बशर्ते कि $\operatorname{Re}(\rho) > 0$, $\operatorname{Re}[\rho + 1/2 - a/2 + \beta/2] > 0$, a तथा b अ-शून्य अचर हैं तथा व्यंजक $[ax + b(1-x)]$ शून्य नहीं है जहाँ $0 \leq x \leq 1$.

$$\int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\rho-\nu} [ax + b(1-x)]^{-2\rho+\nu-1} {}_2F_1 \left[a, 1-a; \nu; \frac{ax}{ax+b(1-x)} \right] dx \\ = \frac{\pi 2^{1-2\rho} \Gamma(\nu) \Gamma(\rho) \Gamma(\rho-\nu+1)}{\Gamma(a/2 + \nu/2) \Gamma(1/2 - a/2 + \nu/2) \Gamma(\rho + a/2 - \nu/2 + 1/2) \Gamma(\rho - a/2 - \nu/2)} \quad (2.2)$$

उपपत्ति : (2.1) को सिद्ध करने के लिए, हाइपरज्यामितीय फलन को एक श्रेणी के रूप में व्यक्त करते हैं, समाकल तथा संकलन के क्रम को बदला जाता है, समाकल का मूल्यांकन परिणाम [3, p-450] की सहायता से किया जाता है, श्रेणी को जोड़ा जाता है तथा वाटसन के प्रमेय [8, 4.1, 14 p 112] का प्रयोग किया जाता तो हमें (2.1) की प्राप्ति होती है। परिणाम (2.2) को भी इस प्रकार व्हिपल का प्रमेय [4, 4.1, 16 p 112] प्रयुक्त करके प्राप्त किया जा सकता है।

प्रस्तुत प्रपत्र में निम्नलिखित दो समाकलों का मान ज्ञात किया गया है

$$\int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\rho-1} [ax + b(1-x)]^{-2\rho} {}_2F_1 \left[a, \beta; \frac{a+\beta+1}{2}; \frac{ax}{ax+b(1-x)} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \times H_{p \ q}^{m \ n} \left[z \frac{\{abx(1-x)\}^\sigma}{\{ax+b(1-x)\}^{2\sigma}} \left| \begin{matrix} 1(a_j, e_j)_p \\ 1(b_j, f_j)_q \end{matrix} \right. \right] dx \\
 & = \frac{\pi 2^{1-2\rho} \Gamma(1/2 + \alpha/2 + \beta/2)}{a^\rho b^\rho \Gamma(\alpha/2 + 1/2) \Gamma(\beta/2 + 1/2)} H_{p+2 \ q+2}^{m \ n+2} \left[z 2^{-2\rho} \left| \begin{matrix} (1-\rho, \sigma) \\ 1(b_j, f_j)_q \end{matrix} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \begin{matrix} (1/2 + \alpha/2 + \beta/2 - \rho, \sigma), 1(a_j, e_j)_p \\ (1/2 - \rho + \alpha/2, \sigma), (1/2 - \rho + \beta/2, \sigma) \end{matrix} \right. \right] \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

जहाँ $\sigma > 0, \operatorname{Re}[1/2 - \alpha/2 - \beta/2] > 0, \operatorname{Re}[\rho + \sigma(b_j/f_j)] > 0, j=1, \dots, m, |\arg z| < \frac{1}{2}\phi\pi, \phi > 0, a$
 तथा b अशून्य अक्षर हैं तथा व्यंजक $[ax + b(1-x)]$ शून्य नहीं हैं जहाँ $0 \leq x \leq 1$.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\rho-\nu} [ax + b(1-x)]^{-2\rho+\nu-1} {}_2F_1 \left[a, 1-\alpha; \nu; \frac{ax}{ax+b(1-x)} \right] \\
 & \times H_{p \ q}^{m \ n} \left[z \frac{\{abx(1-x)\}^\sigma}{\{ax+b(1-x)\}^{2\sigma}} \left| \begin{matrix} 1(a_j, e_j)_p \\ 1(b_j, f_j)_q \end{matrix} \right. \right] dx \\
 & = \frac{\pi 2^{1-2\rho} \Gamma(\nu)}{a^\rho b^\rho \Gamma(\alpha/2 + \nu/2) \Gamma(1/2 - \alpha/2 + \nu/2)} H_{p+2 \ q+2}^{m \ n+2} \left[z 2^{-2\sigma} \right. \\
 & \quad \left. \left| \begin{matrix} 1-\rho, \sigma, (\nu-\rho, \sigma), 1(a_j, e_j)_p \\ 1(b_j, f_j)_q, (1/2 - \rho - \alpha/2 + \nu/2, \sigma), (1-\rho + \alpha/2 + \nu/2, \sigma) \end{matrix} \right. \right] \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

जहाँ $\sigma > 0, \operatorname{Re}(\nu) > 0, \operatorname{Re}[\rho + \sigma(b_j/f_j)] > 0, j=1, \dots, m, |\arg z| < \phi\pi/2, \phi > 0$ तथा b अशून्य
 अक्षर हैं तथा व्यंजक $[ax + b(1-x)]$, शून्य नहीं हैं जहाँ $0 \leq x \leq 1$.

उपपत्तियाँ : (2.3) को सिद्ध करने के लिए इसके वाम पक्ष को I द्वारा सूचित करते हैं, H-फलन को (1.1) की सहायता से व्यक्त करते हैं तथा थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् समाकलन के क्रम को बदल देते हैं जो इस प्रक्रम में निहित समाकलों के परम अभिसरण के कारण वैध है, परिणाम (2.1) की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान निकालते हैं और तब (1.1) की सहायता से प्राप्त फल की विवेचना करते हुए हमें परिणाम (2.3) प्राप्त होता है।

इसी प्रकार (2.2) तथा (1.1) की सहायता से परिणाम (2.4) प्राप्त किया जा सकता है।

3. विशिष्ट दशाएँ

1. यदि हम (2.3) तथा (2.4) में $\sigma = e_j = f_i = 1 (j=1, \dots, p; i=1, \dots, q)$ लें तो हमें G-फलन के लिए संगत समाकल प्राप्त होते हैं।

2. यदि हम (2.3) में $e_1=e_2=\sigma, a_1=1/2+\alpha/2-\rho, a_2=1/2+\beta/2-\sigma$ लें तो हमें H -फलन के लिए निम्नलिखित समाकल निरूपण प्राप्त होता है।

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{\rho-1}(1-x)^{\sigma-1}[ax+b(1-x)]^{-2\rho} {}_2F_1\left[\alpha, \beta; \frac{\alpha+\beta+1}{2}; \frac{ax}{axb(1-x)}\right] \\ & \times H_{p\ q}^{m\ n}\left[z \frac{\{abx(1-x)\}^\sigma}{\{ax+b(1-x)\}^{2\rho}} \middle| \begin{matrix} (1/2+\alpha/2-\rho, \sigma), (1/2+\beta/2-\rho, \sigma), {}_3(a_j, e_j)_p \\ {}_1(b_j, f_j)_q \end{matrix} \right] dx \\ & = \frac{\pi 2^{1-2\rho} \Gamma(1/2+\alpha/2+\beta/2)}{(ab)^\rho \Gamma(\alpha/2+1/2) \Gamma(\beta/2+1/2)} H_{p\ q}^{m\ n}\left[z 2^{-2\rho} \middle| \begin{matrix} (1-\rho, \sigma), \\ {}_1(b_j, f_j)_q \\ (1/2+\alpha/2+\beta/2-\rho, \sigma), {}_3(a_j, e_j)_p \end{matrix} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

जहाँ (2.3) से सरलता से प्राप्य प्रतिबन्धों की तुष्टि होती है।

चूँकि H -फलन में अनेक विशिष्ट फलन उसकी विशिष्ट दशाओं के रूप में हैं अतः उसमें प्राप्त प्राचलों के विशिष्टीकरण से अनेक परिणाम प्राप्त हो सकते हैं। किन्तु स्थानाभाव के कारण हम उन्हें यहाँ नहीं दे रहे।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Composite Math., 1963, 15, 239.
2. फाक्स, सी०, Trans. Amer- Math. Soc. 1961, 98, 395.
2. मैकराबर्ट, टी० एम०, Math. Annalen, 1960-61, 142, 450.
4. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, Generalized Hypergeometric functions with applications in Statistics and Physical Sciences, Springer-Verleg, New-York, 1973.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 26, No. 4, 1983

H -फलन वाला समाकल

ए० के० राठी

गणित विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, दौसा

[प्राप्त-जनवरी 11, 1982]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य हाइपरज्यामितीय फलन तथा H -फलन वाले एक समाकल का मूल्यांकन करना है जिसमें गुप्ता तथा ओल्खा और शर्मा द्वारा दिये गये अनेक परिणाम इसकी विशिष्ट दशाओं के रूप में सम्मिलित हैं।

Abstract

An integral involving H -function. By A. K. Rathie, Department of Mathematics, Government P. G. College, Dausa.

The object of this paper is to evaluate an integral involving hypergeometric function and the H -function which includes as its particular cases several results given by Gupta and Olkha (3) and Sharma (6).

1. प्रस्तावना

फाक्स^[2] द्वारा प्रदर्शित H -फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित एवं अंकित किया जावेगा।

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} 1^{(a_j, e_j)}_p \\ 1^{(b_j, f_j)}_q \end{matrix} \right. \right] = (2\pi i)^{-1} \int_L \theta(s) z^s ds \quad (1.1)$$

जहाँ

$$\theta(s) = \prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - f_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + e_j s) \Bigg/ \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + f_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - e_j s) \quad (1.2)$$

तथा प्राचल इस प्रकार सीमित हैं कि H -फलन सार्थक है। विस्तार के लिए ब्राक्समा^[1] देखें।

ब्राक्समा^[1] ने सिद्ध किया है कि (1.1) के दाईं ओर का समाकल परम अभिसारी होता है जब $\theta > 0$ तथा $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi\theta$, जहाँ

$$\theta = \sum_{j=1}^n e_j - \sum_{j=n+1}^p e_j + \sum_{j=1}^m f_j - \sum_{j=m+1}^q f_j \quad (1.3)$$

हमें निम्नलिखित परिणाम^[5] की आवश्यकता पड़ेगी

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\sigma-1} [ax+b(1-x)]^{-\rho-\sigma} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, \beta; \rho; \frac{ax}{ax+b(1-x)} \end{matrix} \right] dx \\ &= \frac{\Gamma(\rho) \Gamma(\sigma) \Gamma(\rho+\sigma-a-\beta)}{a^\rho b^\sigma \Gamma(\rho+\sigma-a) \Gamma(\rho+\sigma-\beta)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

जहाँ $\operatorname{Re}(\rho) > 0$, $\operatorname{Re}(\sigma) > 0$, $\operatorname{Re}(\rho+\sigma-a-\beta) > 0$, a तथा b अ-शून्य अचर हैं तथा व्यंजक $[ax+b(1-x)]$, हैं जहाँ $0 \leq x \leq 1$ शून्य नहीं हैं।

2. मुख्य परिणाम

सर्वप्रथम हम निम्नलिखित परिणाम को सिद्ध करेंगे। यह परिणाम नया प्रतीत होता है।

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\sigma-1} [ax+b(1-x)]^{-\rho-\sigma} e^{-z \frac{ax}{ax+b(1-x)}} \\ & \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, \beta; \rho; \frac{ax}{ax+b(1-x)} \end{matrix} \right] dx \\ &= e^{-z} \frac{\Gamma(\rho) \Gamma(\sigma) \Gamma(\rho+a-a-\beta)}{a^\rho b^\sigma \Gamma(\rho+\sigma-\beta) \Gamma(\rho+\sigma-\beta)} {}_2F_2 \left[\begin{matrix} \sigma, \rho+\sigma-a-\beta; \rho+\sigma-a, \rho+\sigma-\beta; z \end{matrix} \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

जहाँ $\operatorname{Re}(\rho) > 0$, $\operatorname{Re}(\sigma) > 0$, $\operatorname{Re}(\rho+\sigma-a-\beta) > 0$, a तथा b अ-शून्य अचर हैं और व्यंजक $[ax+b(1-x)]$, शून्य नहीं है जहाँ $0 \leq x \leq 1$

उपपत्ति—(2.1) को सिद्ध करने के लिए वाम पक्ष को I द्वारा सूचित करते हैं और इसे निम्नवत् व्यक्त करते हैं।

$$I = e^{-z} \int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\sigma-1} [ax+b(1-x)]^{-\rho-\sigma} e^{z \frac{b(1-x)}{ax+b(1-x)}}$$

$$\times {}_2F_1 \left[a, \beta; \rho; \frac{ax}{ax+b(1-x)} \right] dx \quad (2.2)$$

अब $e^{-z} b^{(1-x)} [ax+b(1-x)]$ के स्थान पर

$$\sum_{r=0}^{\infty} z^r b^r (1-x)^r \{r! [ax+b(1-x)]^r\}^{-1}$$

रखते हैं, समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलते हैं; समाकल का मान (1.4) की सहायता से ज्ञात करते हैं और तब श्रेणियों को जोड़ते हैं जिससे अन्त में हमें (2.1) प्राप्त होता है।

प्रस्तुत प्रपत्र में निम्नलिखित समाकल का मूल्यांकन हुआ है :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\sigma-1} [ax+b(1-x)]^{-\rho-\sigma} {}_2F_1 \left[a, \beta; \rho; \frac{ax}{ax+b(1-x)} \right] \\ & \times e^{-z} ax [ax+b(1-x)] H_{p,q}^{m,n} \left[y \left\{ \frac{b(1-x)}{ax+b(1-x)} \right\}^\lambda \middle| \begin{matrix} 1^{(a,j), e^{(j)}_p} \\ 1^{(b,j), f^{(j)}_q} \end{matrix} \right] dx \\ & = \Gamma(\rho) a^{-\rho} b^{-\sigma} e^{-z} \sum_{r=0}^{\infty} z^r / r! \\ & \times H_{p+2, q+2}^{m, n+2} \left[y \left| \begin{matrix} (1-\sigma-r, \lambda), (1-\rho-\sigma-r+a+\beta, \lambda), 1^{(a,j), e^{(j)}_p} \\ 1^{(b,j), f^{(j)}_q}, (1-\rho-\sigma-r+a, \lambda), (1-\rho-\sigma-r+\beta, \lambda) \end{matrix} \right. \right] \quad (2.3) \end{aligned}$$

जहाँ $\lambda > 0$, $\text{Re}(\rho) > 0$, $\text{Re}(\rho + \sigma - a - \beta) > 0$, $\text{Re}[\sigma + \lambda(bj/fj)] > 0$, $j=1, \dots, m$, $\theta > 0$, $|\arg y| < \frac{1}{2}\theta\pi$ जहाँ θ वैसा है जैसा (1.3) में दिया चुका है; a तथा b अ-शून्य अचर हैं तथा व्यंजक $[ax+b(1-x)]$, शून्य नहीं है जहाँ $0 \leq x \leq 1$.

उपपत्ति दिए हुए समाकल को I द्वारा सूचित करते हैं और निम्नवत् व्यक्त करते हैं :

$$\begin{aligned} J &= e^{-z} \sum_{r=0}^{\infty} b^r z^r \{r!\}^{-1} \int_0^1 x^{\rho-1} (1-x)^{\sigma-1+r} [ax+b(1-x)]^{-\rho-\sigma-r} \\ & \times {}_2F_1 \left[a, \beta; \rho; \frac{ax}{ax+b(1-x)} \right] H_{p,q}^{m,n} \left[y \left\{ \frac{b(1-x)}{ax+b(1-x)} \right\}^\lambda \middle| \begin{matrix} 1^{(a,j), e^{(j)}_p} \\ 1^{(b,j), f^{(j)}_q} \end{matrix} \right] dx \quad (2.4) \end{aligned}$$

यदि ज्ञात परिणाम^[4] की सहायता से x समाकल का मान ज्ञात करें तो (2.3) प्राप्त होता है।

विशिष्ट दशाएँ

1. यदि हम (2.3) $e_j=1, \dots, p, f_j=1, j=1, \dots, q, \lambda=1$ लें तो हमें G फलन वाला संगत समाकल प्राप्त होता है।
2. यदि हम (2.3) में $a=b$ रखें तो हमें गुप्ता तथा ओल्खा^[3] द्वारा सिद्ध किया गया परिणाम प्राप्त होता है।
3. यदि हम (2.3) में $a=b, \lambda=\sigma=\sigma/t$, लें जहाँ σ, t धन पूर्णांक हैं तो हमें शर्मा^[6] द्वारा सिद्ध किया गया परिणाम प्राप्त होता है।

इस प्रकार अनेक ज्ञात तथा अज्ञात परिणाम प्राप्त किये जा सकते हैं।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी०एल०जे०, Composite Math, 1963, 15, 239-341
2. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, 98, 395-429
3. गुप्ता, के०सी० तथा ओल्खा, जी०एस०, 1969, 1, 2, 205-212
4. कल्ला, एस०एल० तथा जोमेज लोपेज, ए०एम०एम०, Univ. Nac. Tucuman, 1972, 22, 165-170.
5. शर्मा, बी०एल०, Quart. Res. J. Vikram Univ. 1966, 10, 79-83
6. शर्मा ओ०पी०, Coll. Math. 1965, 17, 197-209

दो चरों वाले परिवर्द्धित H-फलन की अनन्त श्रेणी के रूपान्तर

वाई० एन० प्रसाद तथा इन्द्र कुमार

सम्प्रयुक्त गणित अनुभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी

बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—मई 17, 1982]

सारांश

इस प्रपत्र में प्रसाद तथा प्रसाद [2] द्वारा परिभाषित दो चरों वाले परिवर्द्धित H-फलन की अनन्त श्रेणी के दो रूपान्तर प्राप्त किये गए हैं। हाल ही में गर्ग [1] द्वारा प्राप्त रूपान्तर हमारे रूपान्तरों की विशिष्ट दशाओं के रूप में हैं।

Abstract

On transformations of infinite series of the modified H -function of two variables.
By Y. N. Prasad and Indra Kumar, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras, Hindu University, Varanasi.

In this paper we have obtained two interesting transformations of infinite series of the modified H -function of two variables defined by Prasad and Prasad [1]. The transformations recently obtained by Garg [2] follow as special cases of our transformations.

1. प्रस्तावना

प्रसाद तथा प्रसाद [1] ने दो चरों वाले परिवर्द्धित H -फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित एवं अंकित किया है

$$H[x, y] = H_{p_1, q_1; p_2, q_2; [p_3, q_3], [p_4, q_4]}^{m_1, n_1; m_2, n_2; (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[\begin{matrix} \{(a_{p_1}; a_{p_1}, A_{p_1})\}; \\ \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \end{matrix} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} &\{(c_{p_2}, \gamma_{p_2}, C_{p_2})\}; \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \\ &\{(d_{q_2}, \delta_{q_2}, B_{q_2})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \end{aligned} \right| x, y \Bigg] \\ = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t) \theta_1(s) \theta_2(t) x^s y^t ds dt, \quad (1.1)$$

जहाँ

$$\phi(s, t) = \frac{\prod_1^{m_1} \Gamma(b_j - \beta_j s - B_j t) \prod_1^{n_1} \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s + A_j t)}{\prod_{m_1+1}^{q_1} \Gamma(1 - b_j + \beta_j s + B_j t) \prod_{n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j - \alpha_j s - A_j t)} \\ \times \frac{\prod_1^{m_2} \Gamma(d_j - \delta_j s + D_j t) \prod_1^{n_2} \Gamma(1 - c_j + \gamma_j s - C_j t)}{\prod_{m_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - d_j + \delta_j s - D_j t) \prod_{n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j - \gamma_j s + C_j t)}, \quad (1.2)$$

$$\theta_1(s) = \frac{\prod_1^{m_3} \Gamma(f_j - F_j s) \prod_1^{n_3} \Gamma(1 - e_j + E_j s)}{\prod_{m_3+1}^{q_3} \Gamma(1 - f_j + F_j s) \prod_{n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j - E_j s)}, \quad (1.3)$$

तथा

$$\theta_2(t) = \frac{\prod_1^{m_4} \Gamma(h_j - H_j t) \prod_1^{n_4} \Gamma(1 - g_j + G_j t)}{\prod_{m_4+1}^{q_4} \Gamma(1 - h_j + H_j t) \prod_{n_4+1}^{p_4} \Gamma(g_j - G_j t)}, \quad (1.4)$$

जहाँ x तथा y शून्य नहीं है एवं अ-रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है। (1.1) में निहित प्राचलों के प्रतिबन्ध, वैश्लेषिकता प्रतिबन्ध तथा द्विगुण समाकलों की अभिसरण के प्रतिबन्ध नीचे दिये जा रहे हैं। (1.1) द्वारा परिभाषित H -फलन (1.2) में पाये जाने वाले मिश्रित संकेत गामा फलन गुणकों के कारण परिवर्धित फलन है।

प्रतिबन्ध इस प्रकार है : $m_1, m_2, m_3, m_4; n_1, n_2, n_3, n_4; p_1, p_2, p_3, p_4$; तथा q_1, q_2, q_3, q_4 सभी ऐसे धन पूर्णांक हैं कि $0 \leq m_i \leq q_i, 0 \leq n_i \leq p_i, (i=1, 2, 3, 4)$. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D, E, F, G, H$ ये सभी अक्षर धन संख्यायें हैं और a, b, c, d, e, f, g, h अक्षर समिश्र संख्यायें हैं। (1.1) द्वारा परिभाषित फलन x तथा y का वैश्लेषिक फलन है यदि

$$R = \sum_1^{p_1} a_j + \sum_1^{p_2} \gamma_j + \sum_1^{p_3} E_j - \sum_1^{q_1} \beta_j - \sum_1^{q_2} \delta_j - \sum_1^{q_3} F_j < 0, \quad (1.5)$$

$$S = \sum_1^{p_1} A_j + \sum_1^{q_2} D_j + \sum_1^{p_4} G_j - \sum_1^{q_1} B_j - \sum_1^{p_2} C_j - \sum_1^{q_4} H_j < 0, \quad (1.6)$$

तथा (1.1) अभिसारी होता है यदि

$$|\arg x| < \frac{1}{2}U\pi, |\arg y| < \frac{1}{2}V\pi, \quad (1.7)$$

जहाँ

$$U = \sum_1^{n_1} a_j - \sum_{n_1+1}^{p_1} a_j + \sum_1^{m_1} \beta_j - \sum_{m_1+1}^{q_1} \beta_j + \sum_1^{n_2} \gamma_j - \sum_{n_2+1}^{p_2} \gamma_j \\ + \sum_1^{m_2} \delta_j - \sum_{m_2+1}^{q_2} \delta_j + \sum_1^{n_3} E_j - \sum_{n_3+1}^{p_3} E_j + \sum_1^{m_3} F_j - \sum_{m_3+1}^{q_3} F_j > 0, \quad (1.8)$$

तथा

$$V = \sum_1^{n_1} A_j - \sum_{n_1+1}^{p_1} A_j + \sum_1^{m_1} B_j - \sum_{m_1+1}^{q_1} B_j + \sum_1^{n_2} C_j - \sum_{n_2+1}^{p_2} C_j \\ + \sum_1^{m_2} D_j - \sum_{m_2+1}^{q_2} D_j + \sum_1^{n_4} G_j - \sum_{n_4+1}^{p_4} G_j + \sum_1^{m_4} H_j - \sum_{m_4+1}^{q_4} H_j > 0, \quad (1.9)$$

2. विशिष्ट परिणाम

हम दो चरों वाले परिवर्धित H-फलन के लिए निम्नलिखित प्रसार सूत्रों की स्थापना करेंगे

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} H_{p_1+1, q_1; p_2, q_2+1 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4+1]}^{m_1, n_1+1; m_2+1, n_2 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(1-c-r; h, k), \right. \\ \left. \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \right. \\ \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\}; \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \\ (d+r; h', k'), \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\}; \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \\ \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \\ \left. \{(h_{q_4}, H_{q_4})\}, (f-r, p) \right] \Bigg|_{x, y} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-z)^r}{r!} H_{p_1+1, q_1+1; p_2+2,}^{m_1, n_1+1; m_2+1,} \\ n_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4) \left[(1-c-r; h, k), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \right. \\ \left. q_2+3 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4] \right] \left[\{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}, (f+d; h', p-k') \right]$$

$$\begin{aligned}
& (1-c-d-f; h-h', j-k-k'), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\}, (1-f-c; h, p-k) : \\
& (d+r; h', k'), (1-f-c-d; h-h', p-k-k'), \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\}, \\
& \{(e_{p_3}; E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}; G_{p_4})\} \\
& (1-c-d-f-r; h-h', p-k-k') : \{(f_{q_3}; F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}; H_{q_4})\} \Bigg| x, y \Bigg] \\
& + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-z)^{r+1-f-c-d}}{r!} H_{\substack{m_1, n_1+1; m_2+2, n_2+1; (m_3, n_3); (m_4, n_4) \\ p_1+1, q_1+1; p_2+2, q_2+3 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4]}} \\
& \left[\begin{aligned} & (f+d-r; h', p-k'), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; (2-f-c-d; h-h', p-k-k'), \\ & \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}, (f+d; h', p-k-k'); (r+1-f-c; h, p-k), \\ & \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\}, (1-f-c; h, p-k) : \\ & (2-f-c-d; h-h', p-k-k'), \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\}, (1-c-d-f-r; h-h', p-k-k') : \\ & \{(e_{p_3}; E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}; G_{p_4})\} \\ & \{(f_{q_3}; F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}; H_{q_4})\} \end{aligned} \right] x(1-z)^{-h+h'}, y(1-z)^{p-k-k'}, \quad (2.1)
\end{aligned}$$

बशर्ते कि (i) $\{h, h', k, k'\} \geq 0, p \geq k+k' \geq 0, h \geq h', c$ तथा d संमिश्र संख्यायें हैं,

(ii) $|\arg(1-z)| < \pi, |\arg x| < \frac{1}{2}(U+h+h')\pi, |\arg y| < \frac{1}{2}(V+k+k'-p)\pi, U > 0, V > 0$ जहाँ U तथा V को क्रमशः (1.8) तथा (1.9) समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जाता है,

(iii) $R+h < h', S+k+k' < p$ जहाँ R तथा S को क्रमशः (1.5) तथा (1.6) समीकरणों द्वारा दिया जाता है,

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} H_{\substack{m_1+1, n_1; m_2, n_2+1 : (m_3, n_3+1); (m_4, n_4) \\ p_1, q_1+1; p_2+1, q_2 : [p_3+1, q_3]; [p_4, q_4]}} \left[\begin{aligned} & \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \\ & \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\} \end{aligned} \right] \\
& (1-d-r; h', k'), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : (1-f-r, p), \{(e_{p_3}; E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}; G_{p_4})\} \Bigg| x, y \Bigg] \\
& (1-c-r; h, k); \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}; F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}; H_{q_4})\} \\
& = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-z)^r}{r!} H_{\substack{m_1+1, n_1; m_2, n_2+2 : (m_3, n_3+1); (m_4, n_4) \\ p_1+1, q_1+2; p_2+3, q_2+1 : [p_3+1, q_3]; [p_4, q_4]}} \\
& \left[\begin{aligned} & \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, (d-f-c+r-1; h-h', k+k'); (f+d-c+1; h-h', p-k-k'), \\ & (d+f-c+1; h-h', k+k'), \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}, (1-c+d; h-h', k+k'); \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & (1-d-\gamma; h', k'), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : (1-f-r, p), \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \\
 & \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\}, (1-c+f; h, p-k) : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\}
 \end{aligned} \right| x, y \\
 & + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-z)^{c-d-f+r}}{r!} H_{p_1+1, q_1+1; p_2+2, q_2+3 : [p_3, q_3];}^{m_1, n_1+1; m_2+1, n_2+1 : (m_3, n_3);} \\
 & (m_4, n_4) \left[\begin{aligned}
 & (1-c+d+r; h-h', k+k'), \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; (1-c+f+r; h, p-k), \\
 & [p_4, q_4] \left[\{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}, (1-c+d; h-h', k+k'); (d+f-c; h-h', p-k-k'), \right. \\
 & (d+f-c; h-h', p-k-k'), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \\
 & \left. \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\}, (d+f-c-r; h-h', p-k-k'), (1-c+f; hp-k); \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \right.
 \end{aligned} \right] \\
 & \left. \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \right| (1-z)^{h-h'}, y(1-z)^{-p+k+k'} \Bigg], \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

वर्तते कि (i) $\{h, h', k, k'\} \geq 0, p \geq k+k', h \geq h', c, d, f$ समिश्र संख्यायें हैं,

(ii) $|\arg(1-z)| < \pi, |\arg x| < \frac{1}{2}(U+p+h'-h)\pi, U > 0, |\arg y| < \frac{1}{2}(V-k+k')\pi, V > 0$,
जहाँ U तथा V को क्रमशः (1.8) तथा (1.9) द्वारा व्यक्त किया जाता है;

(iii) $R+p+h' < h, S < k+k'$ जहाँ R तथा S को क्रमशः (1.5) तथा (1.6) समीकरणों द्वारा दिया जाता है,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-z)^r}{r!} H_{p_1+1, q_1; p_2, q_2+1 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4+1]}^{m_1, n_1; m_2+1, n_2 : (m_3, n_3); (m_4+1, n_4)} \left[\begin{aligned}
 & \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, \\
 & \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\};
 \end{aligned} \right] \\
 & (\lambda+r; h, k); \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \\
 & (d+r; h', k'), \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; (f+r, p), \\
 & \left. \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \right| x, y \Bigg] = (-z)^{-d} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1+z^{-1})^r}{r!} \\
 & \times H_{p_1+2, q_1+2; p_2+2, q_2+3 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4+1]}^{m_1, n_1+1; m_2+1, n_2+1 : (m_3, n_3); (m_4+1, n_4)} \left[\begin{aligned}
 & (\lambda-d-r; h-h', k+k'), \\
 & \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\} \\
 & \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, (\lambda-d; h+h', k+k'); (\lambda-d-f; h-h', p-k-k'), \\
 & (\lambda-d; h-h', k+k'); (\lambda-d-f; h+h', p-k-k'), (d+r; h', k'),
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\}, (\lambda - f; h, p - k) : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \\
& \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\}, (\lambda - d - f + r; h - h', p - k - k') : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \\
& \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x z^{h'}, y z^{-k'} \\ (f, p), \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \end{array} \right. \\
& + (-z)^{d-\lambda} (1+z)^{\lambda-d-f} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-z^{-1})^r}{r!} H_{p_1+1, q_1+1; p_2+3,}^{m_1+1, n_1; m_2+1,} \\
& n_2+2 : (m_3, n_3); (m_4, n_4) \left[\{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}, (\lambda - d; h - h', k + k'); \right. \\
& q_2 + 2 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4] \left[(r + \lambda - d; h - h', k + k'), \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \right. \\
& (d + r; h', k'), (\lambda + 1 - d - f; h - h', p - k - k'), \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\}, \\
& (\lambda + 1 - d - f; h - h', p - k - k'), \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\}, \\
& (\lambda + 1 + r - d - f; h - h', p - k - k') : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \\
& (d; h', k'); \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\} \\
& \left. \left| x(-z)^{h-h'}(1+z)^{-h+h'}, y(-z)^{k+k'}(1+z)^{h-k-k'} \right. \right], \quad (2.3)
\end{aligned}$$

बशर्ते कि (i) $\{h, h', k + k'\} \geq 0, p \geq k + k', h \geq h', c, d, f$ संमिश्र संख्यायें हैं,

(ii) $|\arg(-z)| < \pi, |\arg x| < \frac{1}{2}(U + h' - h)\pi, U > 0, |\arg y| < \frac{1}{2}(V + p + k' - k)\pi, V > 0,$

जहाँ U तथा V (2.1) की भाँति हैं,

(iii) (2.1) में दिया गया प्रतिबन्ध (iii) सत्य है।

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-z)^r}{r!} H_{p_1+1, q_1; p_2, q_2+1 : [p_3, q_3]; [p_4, q_4+1]}^{m_1, n_1+1; m_2+1, n_2 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(1 - \lambda - r; h, k), \right. \\
& \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}; \\
& \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\}; \{(c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2})\} : \{(e_{p_3}, E_{p_3})\}; \\
& (d + r; h', k'), \{(d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2})\} : \{(f_{q_3}, F_{q_3})\}; \{(h_{q_4}, H_{q_4})\}, \\
& \{(g_{p_4}, G_{p_4})\} \left| \begin{array}{c} x, y \\ (1 - f - r, p) \end{array} \right] = (-z)^{-d} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1 + z^{-1})^r}{r!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times H_{p_1+2, q_1+2; p_2+2, q_2+3 : [p_3, q_3] ; [p_4, q_4]}^{m_1+1, n_1+1; m_2+2, n_2+1 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \left[(1-\lambda; h, k), \right. \\
& \{ (a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1}) \}, (d+1-f; h', p-k'); (f-d-\lambda; h-h', p-k-k'), \\
& \{ (b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1}) \}, (d+1-f; h', p-k'); (f-d-\lambda; h-h', p-k-k'), \\
& \{ (c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2}) \}, (f-\lambda; h', p-k) : \\
& (d+r; h', k'), \{ (d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2}) \}, (f-d-\lambda-r; h-h', p-k-k'); \\
& \{ (e_{p_3}; E_{p_3}) \}; \{ (g_{p_4}; G_{p_4}) \} \left| x(-z)^{h'}, y(-z)^{-k'} \right] + (-z)^{d-f}(1+z)^{f-d-\lambda} \\
& \{ (f_{q_3}; F_{q_3}) \}; \{ (h_{q_4}; H_{q_4}) \} \left. \right] \\
& \times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1+z^{-1})^r}{r!} H_{p_1+1, q_1+1; p_2+3, q_2+2 : [p_3, q_3] ; [p_4, q_4]}^{m_1, n_1+1; m_2+1, n_2+2 : (m_3, n_3); (m_4, n_4)} \\
& \left[(d+1-f-r; h', p-k), \{ (a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1}) \}; (f+1-d-\lambda; h-h', p-k-k'), \right. \\
& \{ (b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1}) \}, (d+1-f; h', p-k'); (f+1-d-\lambda; h-h', p-k-k'), \\
& (d+r; h', k'), \{ (c_{p_2}; \gamma_{p_2}, C_{p_2}) \}, (f+r+1-d-\lambda; h-h', p-k-k'); \\
& \{ (d_{q_2}; \delta_{q_2}, D_{q_2}) \}, (d; h', k') : \{ (f_{q_3}; F_{q_3}) \}; \\
& \{ (e_{p_3}; E_{p_3}) \}; \{ (g_{p_4}; G_{p_4}) \} \left| x(-z)^{-h'}(1+z)^{-h+h'}, y(-z)^{-p+k'}(1+z)^{p-k-k'} \right] , \\
& \{ (h_{q_4}; H_{q_4}) \} \left. \right] , \tag{2.4}
\end{aligned}$$

वशात् कि (2.1) में दिये गये प्रतिबन्ध $|\arg(-z)| < \pi$ के सहित सत्य हैं।

(2.1) की उपपत्ति : (2.1) को सिद्ध करने के लिये हम इसके वाम पक्ष को लेते हैं और (1.1) की सहायता से H -फलन को इसके कंदूर समाकल रूप में व्यक्त करते हैं तो (2.1) का वाम पक्ष

$$\begin{aligned}
& = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t) \theta_1(s) \theta_2(t) \Gamma(c+r+hs+kt) \\
& \times \frac{\Gamma(d+r-h's+k't)}{\Gamma(1-f+r+pt)} x^s y^t ds dt, \tag{2.5}
\end{aligned}$$

जहाँ $\phi(s, t)$, $\theta_1(s)$, $\theta_2(t)$ को क्रमशः (1.2), (1.3) तथा (1.4) समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जाता है और (2.1) में किया गया प्रतिबन्ध (iii) सत्य है।

अब हम (2.5) को निम्नवत् लिख सकते हैं

$$(2.1) \text{ का वाम पक्ष } = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t) \theta_1(s) \theta_2(t) x^s y^t \\ \times {}_2F_1(d-h's+k't, c+hs+kt; 1-f+pt; z) \frac{\Gamma(d-h's+k't) \Gamma(c+hs+kt)}{\Gamma(1-f+pt)} ds dt, \quad (2.6)$$

क्योंकि समीकरण (2.5) में संकलन तथा समाकलन (2.1) में दिये गये प्रतिबन्ध (ii) के अन्तर्गत परस्पर विनिमेय हैं। अब हम एडेल्यी के सूत्र^[3] का प्रयोग करेंगे अर्थात्

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; a+b-c+1; 1-z) \\ + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z), \quad (2.7)$$

बशर्ते कि $|\arg(1-z)| < \pi$.

(2.6) में सूत्र (2.7) का सम्प्रयोग करके तथा (1.1) में दिये गये दो चरों वाले परिवर्द्धित H -फलन की परिभाषा के द्वारा परिणाम की व्याख्या करते हुये हमें (2.1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

(2.2) की उपपत्ति : (2.1) की उपपत्ति के लिये ही समान है।

(2.3) की उपपत्ति : इसके लिये (2.1) की उपपत्ति की ही भाँति अग्रसर होते हैं और एडेल्यी के सूत्र^[3]

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} z^{-a} {}_2F_1(a, a+1-c; a+b+1-c; 1-z^{-1}) \\ + \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} z^{a-c} (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, 1-a; c+1-a-b; 1-z^{-1}), \quad (2.8)$$

का प्रयोग करते हैं बशर्ते कि $|\arg z| < \pi$

(2.4) की उपपत्ति : (2.3) के ही समान है।

3. विशिष्ट दशायें

(i) $p_2=q_2=0, p=k, k'=0, h'=0$, लेने पर मिश्रित संकेत गामा गुणक लुप्त हो जाते हैं और हमें गर्ग द्वारा प्राप्त^[2] समीकरण (2.1) की प्राप्ति होती है।

(ii) $p_1=q_1=p_2=q_2=0, p=k, h'=k'=0, p_3=0, m_3=q_3=1$, लेने पर $x \rightarrow 0$, बताने पर हमें गर्ग द्वारा प्राप्त [2, eq. (2.3)] परिणाम मिलता है।

(iii) ऊपर लिये गये प्रतिबन्धों के अतिरिक्त यदि हम किन्हीं अन्य प्राचलों का विशिष्टीकरण करें तो हम गर्ग द्वारा प्राप्त समीकरण (2.4) मिलेगा।

निर्देश

1. गर्ग, ओ० पी०, विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1977, 201.
2. प्रसाद, वाई० एन० तथा प्रसाद, एस० : Journal of Scientific Research, B. H. U., 1979-80, 30 (1), 67.
3. एड्ल्यो, ए० : Higher Transcendental Functions, भाग I, मैकग्राहिल बुक कम्पनी

अष्टि में ${}_{r+3}F_{r+2}$ वाला समाकल समीकरण

बन्दना गुहा

गणित विभाग, शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, रायपुर

[प्राप्त—फरवरी 16, 1982]

सारांश

सर्वोक्त हाइपरज्यामितीय फलन के लिए रूड्रिग सूत्र का अनुरूप प्राप्त किया गया है।

Abstract

An integral equation involving ${}_{r+3}F_{r+2}$ in the kernel. By Bandana Guha, Department of Mathematics, Government College of Science, Raipur.

An analogue of Rodrigue's formula for generalized hypergeometric function is obtained in the form :

$${}_{r+3}F_{r+2} \left[\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, \xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r; \\ 1+\alpha, p, p_1, p_2, \dots, p_r; \end{matrix} \frac{x}{t} \right] = \frac{\Gamma(1-\alpha) x^{-\alpha} t^{-n}}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \prod_{i=0}^r \frac{\Gamma(p_i)}{\Gamma(\xi_i)}$$

$$\times D^{\beta+n} x^{n+\alpha+\beta-p_r+1} \prod_{j=0}^{r-1} \delta_{r-j} D^{\xi_j-p_j} \{x^{\xi_j-1}(t+x)^n\}.$$

where $\delta_j = D^{\xi_j-p_j} x^{\xi_j-p_j-1}$, $D = \frac{d}{dx}$, $p_0 = p$ and $\xi_0 = \xi$.

The solution of the integral equation

$$\int_1^x {}_{r+3}F_{r+2} \left[\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, \xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r; \\ 1+\alpha, p, p_1, p_2, \dots, p_r; \end{matrix} \frac{x}{t} \right] f(t) dt = g(x); x_0 > x > 1$$

is obtained by means of integral and differential operators. Known results follow as particular cases.

1. प्रस्तावना

समाकल समीकरण

$$\int_1^x k(x,t) f(t) dt = g(x), \quad x_0 > x > 1 \quad (1.1)$$

का अध्ययन अनेक कार्यकर्ताओं ने किया है। दीक्षित^[1] ने ${}_4F_3$ को रीडिंग सूत्र के अनुरूप में परिवर्तित करके (1.1) का हल समाकल तथा अवकलीय आपरेटरों की सहायता से प्राप्त किया है।

हम ऐसा समाकल समीकरण सिद्ध करेंगे जिसकी अष्टि में ${}_{r+3}F_{r+2}$ हो। इसके हल से अनेक नवीन परिणाम प्राप्त होते हैं।

2. दीक्षित^[1] ने सिद्ध किया है कि

$${}_4F_3 \left[\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, \zeta, \zeta_1; \\ 1+\alpha, p, p_1; \end{matrix} \nu \right] = \frac{\Gamma p_1 \Gamma(1+\alpha) \nu^{-\alpha}}{\Gamma \zeta_1 \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \left(\frac{d}{d\nu} \right)^{\beta+n} \nu^{n+\alpha+\beta-p_1+1} \\ \times \left(\frac{d}{d\nu} \right)^{\zeta_1-p_1} \nu^{\zeta_1-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, \zeta; \\ p; \end{matrix} \nu \right] \quad (2.1)$$

तथा

$${}_4F_3 \left[\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, \zeta, \zeta_1; \\ 1+\alpha, p, p_1; \end{matrix} \frac{x}{t} \right] = \frac{\Gamma p \Gamma p_1 \Gamma(1+\alpha) t^{-n} x^{-\alpha}}{\Gamma \zeta \Gamma \zeta_1 \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \left(\frac{d}{dx} \right)^{\beta+n} x^{n+\alpha+\beta-p_1+1} \\ \times \left(\frac{d}{dx} \right)^{\zeta_1-p_1} x^{\zeta_1-p} \left(\frac{d}{dx} \right)^{\zeta-p} \left\{ x^{\zeta-1} (t-x)^n \right\} \quad (2.2)$$

जो ${}_4F_3$ के लिए रीडिंग सूत्र का अनुरूप है,

हम निम्नलिखित को सिद्ध कर सकते हैं

$${}_5F_4 \left[\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, \zeta, \zeta_1, \zeta_2; \\ 1+\alpha, p, p_1, p_2; \end{matrix} \nu \right] = \frac{\Gamma p}{\Gamma \zeta \Gamma(p-\zeta)} \int_0^1 t^{\zeta-1} (1-t)^{p-\zeta-1} \\ \times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, \zeta_1, \zeta_2; \\ 1+\alpha, p_1, p_2; \end{matrix} \nu t \right] dt. \quad (2.3)$$

यदि हम परिहार^[2] के निम्नलिखित समाकल को $k=1=t$ के लिए प्रयुक्त करें।

$$\int_0^t x^{\alpha-1} (t-x)^{\beta-1} {}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; \\ b_1, \dots, b_q; \end{matrix} cx^k \right] dx = B(\alpha, \beta) t^{\alpha+\beta-1}$$

$$\times_{p+k} F_{q+k} \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p, \frac{a}{k}, \frac{a+1}{k}, \dots, \frac{a+k-1}{k}; \\ b_1, \dots, b_q, \frac{a+\beta}{k}, \frac{a+\beta+1}{k}, \dots, \frac{a+\beta+k-1}{k}; c, k \end{matrix} \right], \quad (2.4)$$

$\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} \beta > 0$, प्राचलों के उपयुक्त मानों सहित तथा (2.4) के बाय पक्ष में (2.2) को अवकल आपरेटरों के पदों में $v^{\xi-1}(1-v)^n$ के लिए प्रतिस्थापित करें और फिर समाकलन करें।

(2.3) में (2.1) से ${}_4F_3$ का मान लेकर रखने तथा समाकल एवं अवकल आपरेटरों के क्रम को परस्पर विनिमय करने पर हमें

$$\begin{aligned} {}_5F_4 \left[\begin{matrix} -n, n+a+\beta+1, \xi, \xi_1, \xi_2; \\ 1+\alpha, p, p_1, p_2; \end{matrix} \nu \right] &= \frac{\Gamma p}{\Gamma \xi \Gamma(p-\xi)} \frac{\Gamma p_2 \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma \xi_2 \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} D_\nu^{\beta+n} \nu^{n+\alpha+\beta-p_2+1} \\ &\times D_\nu^{\xi_2-p_2} \nu^{\xi_2-1} \int_0^1 t^{\xi-1} (1-t)^{p-\xi-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, \xi_1; \\ p_1; \end{matrix} \nu t \right] dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

प्राप्त होता है जहाँ $D_\nu = \frac{d\nu}{d}$

स्तेडान^[3] से हमें ज्ञात है कि

$$D^m \left\{ x^{b+m-1} (1-x)^{a+m-b} \right\} = (b)_m x^{b-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} b-a-m, b+m; \\ b; \end{matrix} x \right]$$

जहाँ $D \equiv \frac{d}{dx}$

जिससे हमें सरलता से (2.6) प्राप्त हो सकता है।

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, \xi_1; \\ p_1; \end{matrix} \nu \right] = \frac{\Gamma p_1 \nu^{1-p_1}}{\Gamma \xi_1} D_\nu^{\xi_1-p_1} \left\{ \nu^{\xi_1-1} (1-\nu)^n \right\} \quad (2.6)$$

(2.5) तथा रेनविले^[4] के फल का प्रयोग करने से यह (2.7) में समानीत हो जाता है।

$$\begin{aligned} {}_5F_4 \left[\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, \xi, \xi_1, \xi_2; \\ 1+\alpha, p, p_1, p_2; \end{matrix} \nu \right] &= \frac{\Gamma p \Gamma p_1 \Gamma p_2 \Gamma(1+\alpha) \nu^{-\alpha}}{\Gamma \xi \Gamma \xi_1 \Gamma \xi_2 \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} D_\nu^{\beta+n} \nu^{n+\alpha+\beta-p_2+1} \\ &\times D_\nu^{\xi_2-p_2} \nu^{\xi_2-1} D_\nu^{\xi_1-p_1} \nu^{\xi_1-1} D_\nu^{\xi-p} \left\{ \nu^{\xi-1} (1-\nu)^n \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

(2.7) में ν के स्थान पर $\frac{x}{t}$ रखने से

$${}_5F_4 \left[\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, \xi, \xi_1, \xi_2; \\ 1+\alpha, p, p_1, p_2; \end{matrix} \frac{x}{t} \right] = \frac{\Gamma p \Gamma p_1 \Gamma p_2 \Gamma(1+\alpha) t^{-n} x^{-\alpha}}{\Gamma \xi \Gamma \xi_1 \Gamma \xi_2 \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \left(\frac{d}{dx} \right)^{\beta+n} x^{n+\alpha+\beta} \\ \times x^{-p_2+1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{\xi_2-p_2} x^{\xi_2-p_1} \left(\frac{d}{dx} \right)^{\xi_1-p_1} x^{\xi_1-p} \left(\frac{d}{dx} \right)^{\xi-p} \left\{ x^{\xi-1} (t-x)^n \right\} \quad (2.8)$$

अतः आगमन से हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$${}_{r+3}F_{r+2} \left[\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, \xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r; \\ 1+\alpha, p, p_1, p_2, \dots, p_r; \end{matrix} \frac{x}{t} \right] = \frac{\Gamma(1+\alpha) x^{-\alpha} t^{-n}}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \\ \prod_{i=0}^r \frac{\Gamma(p_i)}{\Gamma(\xi_i)} \times D^{\beta+n} x^{n+\alpha+\beta-p_r+1} \prod_{j=0}^{r-1} \delta_{r-j} D^{\xi-j-p} \left\{ x^{\xi-1} (t-x)^n \right\}; \quad (2.9)$$

$$\delta_r = D^{\xi_r-p_r} x^{\xi_r-p_r-1} \cdot D = \frac{d}{dx}$$

यदि समाकल (2.4) को $k=1=t$ के लिए प्रयोग करें, (2.4) के वामपक्ष में (2.9) का मान रखें और समाकलन करें। इस विधि से ${}_{r+3}F_{r+2}$ का वही रूप प्राप्त होता हो जो ${}_{r+3}F_{r+2}$ के लिए (2.9) से सूचित होता है। यह परिणाम स्पष्टतः $r=1, 2$ के लिए है जैसा कि (2.2) तथा (2.8) द्वारा प्राप्त होता है।

(2.8) अनुरूप है ${}_{r+3}F_{r+2}$ के लिए प्राप्त रूड्रिग सूत्र का।

3. हम निम्नलिखित आपरेटरों का प्रयोग करेंगे

$$I_{\lambda r}[G(x)] = \frac{1}{(\lambda_r - 1)!} \int_1^x (x-\nu)^{\lambda_r-1} G(\nu) d\nu; \quad (3.1)$$

जहाँ $\lambda_r = \xi_r - p_r, \quad \lambda_0 = \lambda = \beta + n$

$$G(\nu) = \nu^\alpha g(\nu) \quad (3.2)$$

$$D^r I_{\lambda r}[G(x)] = G(x) \quad (3.3)$$

$$I_{\lambda r}[G(x)] = 0 \quad \text{यदि } x=1 \quad (3.4)$$

$$M_r(x) = x^{p_r-s-\xi_r-s+1} I_{\lambda_{r-s+1}}[M_{s-1}(x)]; \quad (3.5) \\ s=1, 2, \dots, r, M_0 = M$$

4. प्रमेय यदि $n \geq 1$ हो तो फलन $f(x)$ परम संतत है $(1, x_0)$ पर यदि $x_0 > 1$ तथा $f(1)=0$, तब समाकल समीकरण

$$\int_1^x {}^{r+3}F_{r+2} \left[\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, \xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r; \\ 1+\alpha, p, p_1, p_2, \dots, p_r; \end{matrix} \frac{x}{t} \right] f(t) dt = g(x) \quad (4.1)$$

जहाँ $\alpha, \beta, \xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, p, p_1, p_2, \dots, p_r$, सभी अनृण संख्यायें हैं का निम्नलिखित हल होगा

$$f(x) = Cx^n D^{n+1} \{x^{1-\xi} I_{\xi-p} M_r(x)\}, x > 1 \quad (4.2)$$

$$\text{जहाँ } C = \frac{(-1)^n B}{n!}, \quad B = \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \prod_{i=0}^r \frac{\Gamma(\xi_i)}{\Gamma(p_i)}$$

उपपत्ति :

(4.1) में (2.9) से ${}^{r+3}F_{r+2}$ का मान रखने तथा समाकल एवं अवकल आपरेटरों के क्रम को परस्पर विनिमय करने पर जो कि वैध है

$$D^{\beta+n} \int_1^x x^{n+\alpha+\beta-p_{r+1}} \prod_{i=0}^{r-1} \delta_{i-j} D^{\xi-p} \{x^{\xi-1} (t-x)^n\} \cdot t^{-n} f(t) dt = B \cdot x^\alpha g(x) \quad (4.3)$$

$(\beta+n)$ बार (4.3) का उत्तरोत्तर समाकलन करने, समाकल तथा अवकल आपरेटरों के परस्पर विनिमय तथा (3.2) के प्रयोग से हमें

$$\begin{aligned} D^{\xi_r-p_r} \int_1^x x^{\xi_r-p_{r-1}} \prod_{j=1}^{r-1} \delta_{r-j} D^{\xi-p} \{x^{\xi-1} (t-x)^n\} t^{-n} f(t) dt \\ = B \cdot x^{-(\alpha+\lambda-p_{r+1})} \frac{1}{(\lambda-1)!} \int_1^x (x-v)^{\lambda-1} G(v) dv; \lambda = \beta+n \end{aligned}$$

प्राप्त होता है। (3.1) में परिभाषित आपरेटर की सहायता से यह

$$D^{\xi_r-p_r} \int_1^x x^{\xi_r-p_{r-1}} \prod_{j=1}^{r-1} \delta_{r-j} D^{\xi-p} \{x^{\xi-1} (t-x)^n\} \cdot t^{-n} f(t) dt = B \cdot M(x) \quad (4.4)$$

$$\text{जहाँ } M(x) = x^{-(\alpha+\lambda-p_{r+1})} I_\lambda [G(x)]$$

में समानीत हो जाता है। (4.4) का $(\xi_r - p_r)$ बार उत्तरोत्तर समाकलन करने से

$$\int_1^x \prod_{j=1}^{r-1} \delta_{r-j} D^{\xi-p} \{x^{\xi-1}(t-x)^n\} \cdot t^{-n} f(t) dt = B \cdot \frac{x^{p_{r-1}-\xi_r}}{(\xi_r - p_r - 1)!} \int_1^x (x-v)^{\xi_r - p_r - 1} M(v) dv$$

$\xi_r - p_r = \lambda_r$ मानने तथा समाकल एवं अवकल आपरेटरों का क्रम परस्पर विनिमय करने और (3.1) का उपयोग करने पर हमें

$$D^{\xi-p} \int_1^x x^{\xi_{r-1}-p_{r-2}} \prod_{j=1}^{r-2} \delta_{r-j} D^{\xi-p} \{x^{\xi-1}(t-x)^n\} \cdot t^{-n} f(t) dt = B \cdot M_1(x) \quad (4.5)$$

मिलता है जहाँ $M_1(x)$ को (3.5) द्वारा अंकित किया जाता है।

$$D^{\xi-p} \int_1^x x^{\xi-1}(t-x)^n \cdot t^{-n} f(t) dt = B \cdot M_r(x) \quad (4.6)$$

प्राप्त होता है जहाँ $M_r(x)$ को (3.5) द्वारा परिभाषित किया जाता है। $(\xi - p)$ बार तक समाकलन करने पर हमें वांछित परिणाम (4.2) प्राप्त होता है।

5. अब समाकल समीकरण पर विचार करेंगे।

$$\int_1^x \left(\frac{x}{r}\right)^{\mu} {}_{r+3}F_{r+2} \left[\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1, \xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r; \\ 1+\alpha, p, p_1, p_2, \dots, p_r; \end{matrix} \frac{x}{t} \right] f_1(t) dt = g_1(x); \quad (5.1)$$

$|x| < x_0$ के लिए

यदि हम $\mu=0$ लें तो (5.1) समानीत होकर (4.1) हो जाता है।

यदि हम $t^{-\mu} f_1(t) = f(t)$ तथा $x^{-\mu} g_1(x) = g(x)$ लिखें तो समीकरण (5.1) पुनः (4.1) में समानीत हो जाता है। अतः (5.1) का हल होगा।

$$f_1(x) = C x^{n+\mu} D^{n+1} [x^{1-\xi} I_{\xi-p} M_r(x)]. \quad (5.2)$$

6. विशिष्ट दशाएँ

यदि हम (4.1), (4.2), (5.1) यथा (5.2) में $r=1$ रखें तो ये सब दीक्षित के⁽⁸⁾ परिणाम में समानीत हो जाते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक कालेज के गणित के प्रोफेसर डा० रतन सिंह के प्रति आभार व्यक्त करता है जिन्होंने शोधपत्र की तैयारी में मार्ग दर्शन किया। लेखक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग के प्रति भी आभार व्यक्त करता है जिसने सीनियर फेलोशिप प्रदान किया।

निर्देश

1. दीक्षित एल० ए०, Ind. Jour. Pure and Appl. Math., 1978, 9, 739.
2. परिहार, सी०एल०, Proc. Ind. Acad. Sci., 1967, 65, 291.
3. स्नेडॉन, आई०एन०, Special Function of Mathematical Physics and Chemistry. ओलिवर एण्ड बॉयड, न्यूयार्क 1961.
4. रेतविले, ई०डी०, Special Functions. मैकमिलन कम्पनी न्यूयार्क (1960)

कतिपय नवीन रंजकों एवं उनके पारद व्युत्पन्नों का संश्लेषण, उनके गुणधर्म तथा औषधीय सक्रियता

अनिल के० गुप्ता, अनिल के० श्रीवास्तव,
निरुपमा श्रीवास्तव तथा एल० बी० लाल

रसायन विभाग, के० जी० के० स्नातकोत्तर महाविद्यालय, मुरादाबाद

[प्राप्त-जून 8, 1983]

सारांश

3-नाइट्रोथैलिक अम्ल के साथ मोनो, डाइ तथा ट्राइ हाइड्राक्सी बेंजीनों को सल्फ्यूरिक अम्ल की उपस्थिति में संघनित करके नवीन प्रकार के थैलीन रंजक तैयार किये गये। इनकी परीक्षा विश्लेषणात्मक तथा स्पेक्ट्रोप्रकाशमापी विधियों से की गई। इसमें से कुछ रंजकों के पारद व्युत्पन्न तैयार किये गये। इन रंजकों के सोडियम लवणों तथा इनके व्युत्पन्नों में प्रतिजीवाणु गुण का पाया गया

Abstract

Studies on synthesis, properties and pharmacological activity of some new phthalein dyes and their mercury derivatives. By Anil K. Gupta, Anil K. Srivastava, Nirupma Srivastava and L. B. Lal, Department of Chemistry, K. G. K. Postgraduate College, Moradabad.

New phthalein type of dyes have been prepared by condensing 3-nitrophthalic acid with mono-, di- and trihydroxy benzenes in presence of concentrated sulphuric acid as condensing agent. They have been examined analytically and spectrophotometrically. Some of these dyes have been mercurated. Sodium salts of these dyes and their mercury derivatives have been found to possess antibacterial property.

निर्जल जिक क्लोराइड तथा सान्द्र सल्फ्यूरिक अम्ल जैसे संघननकारकों की उपस्थिति में फीनाल के साथ थैलिक ऐनहाइड्राइड के संघनन से फीनाथैलीन की प्राप्ति एक विख्यात अभिक्रिया है।^[1] इसी प्रकार फ्लोरेसीन^[2], *o*-क्रोसाल थैलीन^[3], 4 : 5 डाइहाइड्राक्सी फ्लोरेसीन^[4], α -नैफ्थोथैलीन,^[5] फ्लोरोग्लुसिनाल थैलीन^[6] भी तैयार किये जा चुके हैं। हाल में इसी विधि से नैफ्थेलीनों को भी तैयार

किया गया है^[7]। रोहतगी इत्यादि ने^[8-11] हाल ही में मैलीन तथा उनके पारद व्युत्पन्न तैयार किये हैं और उनके प्रतिजीवाणुक गुणों का अध्ययन किया है।

प्रायोगात्क

o-क्रेसाल-3-नाइट्रोथैलीन की तैयारी :

3-नाइट्रोथैलिक अम्ल (4.0 ग्रा०) तथा o-क्रेसाल (4.08 ग्रा०)^[12] का मिश्रण एक गोल पेंदे वाले फ्लास्क में लिया गया और उसे आधे घंटे तथा तैल उष्मक में गरम किया गया। तब सान्द्र सल्फ्यूरिक अम्ल की कुछ बूंदें मिला दी गईं और फ्लास्क में वायु संघनक लगा दिया गया। तब पुनः फ्लास्क की वस्तुओं को 10 घंटे तथा 160°-170° से० पर एक तैल उष्मक में गरम किया गया। फ्लास्क को ठंडा करने पर एक ठोस पिंड प्राप्त हुआ जिसे सोडियम हाइड्राक्साइड विलयन में घोल लिया गया और तनु हाइड्रोक्लोरिक अम्ल मिलाकर रंजक को अवक्षेपित कर लिया गया। रंजकों को छान कर आसुत जल से अच्छी तरह धोया गया और ऐल्कोहल से क्रिस्टलित कर लिया गया।

इसी प्रकार 3-नाइट्रोथैलिक अम्ल के साथ m-क्रेसाल, ओसिनाल, कैटेकाल, हाइड्रोक्विनोन, पाइरोगैलाल तथा फ्लोरोग्लुसिनाल को संघनित किया गया। इस तरह से प्राप्त रंजकों के पारद व्युत्पन्न तैयार किये गये और इन रंजकों तथा इनके पारद व्युत्पन्नों के प्रतिजीवाणुक गुण ज्ञात किये गये।

रंजकों के पारद व्युत्पन्न तैयार करना^[13] :

रंजक (1.09 ग्रा०) को परम ऐल्कोहल (25 मिली०) में विलयित करके इसमें जल (20 मिली०) में बना मरक्यूरिक ऐसीटेट (10.09 ग्रा०) तथा ग्लैसियल ऐसीटिक अम्ल (20 मिली०) मिलाया गया। मिश्रण को रात भर रहने दिया गया और तब छान लिया गया। छानित को भाप-उष्मक में 4 घंटे तक गरम किया गया तो हल्के गुलाबी रंग के नुकीले क्रिस्टल विलग हो आये। इन्हें छान लिया गया। ऐल्कोहल से प्रक्षालित करके अपरिवर्तित रंजक को विलग लिया गया और फिर ऐसीटिक अम्ल से अम्लीकृत जल से इन्हें धोकर अन्त में जल से धोया गया जिससे अधिक पारद लवण हट जाय। तब क्रिस्टलों को 100° से० पर सुखा कर भार ज्ञात किया गया (उपलब्धि 3 ग्रा०)।

पारद का निर्धारण :

पारद व्युत्पन्न (0.29 ग्रा०) को फ्लास्क में लेकर उसमें बिन्दु बिन्दु करके सान्द्र सल्फ्यूरिक अम्ल (10 मिली०) डाला गया। फिर फ्लास्क को तेजी से गरम करके अच्छी तरह हिलाया गया जिससे समांग हो जावे। अब चूर्ण पोटैसियम परमैंगनेट तब तक मिलाया गया जब तक हरा रंग न प्राप्त हो ले। मिश्रण को ठंडा करके जल से तनु किया गया और फिर आक्सैलिक अम्ल मिलाया गया जब तक विलयन स्वच्छ न हो ले। पारद का निर्धारण भारात्मक विधि से मरक्यूरिक सल्फाइड के रूप में किया गया। रंजकों के गुणधर्म सारणी 1 में दिये हुये हैं।

सारणी 1—रंजकों के गुणधर्म

क्रमांक	फीनॉल ग्राम	गलनांक उपलब्धि	रंग	रंजकों के नाम (अणु सूत्र)	प्राप्त % C H N	λ_{max} मध्यम क्षारीय nm.
1.	क्रेसाल (4.08)	245 (60)	किरमिजी लाल	क्रेसाल-3-नाइट्रोथैलीन ($C_{22}H_{17}O_6N$)	67.46 4.30 3.52 (67.51)* (4.34)* (3.58)*	550
2.	m-क्रेसाल (4.08)	250 (61)	हल्का भूरा	क्रेसाल-3-नाइट्रोथैलीन ($C_{22}H_{15}O_6N$)	71.98 3.90 3.61 (72.07) (4.02) (3.70)	530
3.	ओसिनल (4.68)	295 (65)	भूरा	ओसिनल-3-नाइट्रोथैलीन ($C_{22}H_{15}O_7N$)	65.12 3.63 3.38 (65.18) (3.70) (3.45)	—
4.	कैटेकाल (4.16)	274 (70)	गहरा भूरा	कैटेकाल-3-नाइट्रोथैलीन ($C_{20}H_{11}O_7N$)	63.60 2.87 3.65 (63.66) (2.91) (3.71)	500
5.	हाइड्रोक्विनोन (4.16)	266 (58)	भूरा	हाइड्रोक्विनोन-3-नाइट्रोथैलीन ($C_{20}H_{11}O_7N$)	63.62 2.84 3.67 (63.66) (2.91) (3.71)	—
6.	पाइरोगैलाल (4.76)	280 (66)	गहरा भूरा	पाइरोगैलाल-3-नाइट्रोथैलीन ($C_{20}H_{11}O_9O$)	58.60 2.61 3.37 (58.67) (2.68) (3.42)	540
7.	फ्लोरोग्लुसिनॉल (4.76)	320 (62)	गहरा भूरा	फ्लोरोग्लुसिनॉल-3-नाइट्रोथैलीन ($C_{20}H_{11}O_9N$)	58.61 2.63 3.35 (58.67) (2.68) (3.42)	520

*कोष्ठकों में दिये गये मान परिगणित मान हैं। गलनांक खुली कोशिका में ज्ञात किये गये।

सारणी 2

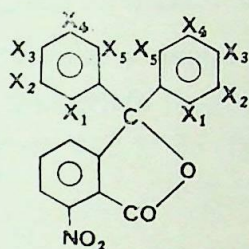
प्रतिजीवाणुक गुणधर्म

क्रमांक	रंजक	रंजको के पारद व्युत्पन्नों के अणु सूत्र	रंजक के सोडियम लवण		पारद व्युत्पन्न	
			एस० ओरियस	बी० कोलाइ	एस० ओरियस	बी० कोलाइ
1.	<i>o</i> -क्रैसाल-3-नाइट्रोथैलीन	$C_{22}H_{15}O_6N(HgOCOCH_3)_2$ F=44.12; C=44.17	2.50	5.00	0.078	0.135
2.	<i>m</i> -क्रैसाल-3-नाइट्रोथैलीन	$C_{22}H_{13}O_6N(HgOCOCH_3)_2$ F=44.93; C=45.06	5.00	10.00	0.625	2.50
3.	ओर्सिनल-3-नाइट्रोथैलीन	$C_{22}H_{13}O_7N(HgOCOCH_3)_2$ F=43.42; C=43.50	5.00	15.00	0.625	1.250
4.	कैटेकाल-3-नाइट्रोथैलीन	$C_{30}H_8O_7N(HgOCOCH_3)_3$ F=52.13; C=52.20	2.50	5.00	0.156	0.078
5.	हाइड्रोक्विनोन-3-नाइट्रोथैलीन	$C_{20}HgO_7N(HgOCOCH_3)_2$ F=44.81; C=44.86	1.25	5.00	0.078	0.635
6.	पाइरोगैलाल-3-नाइट्रोथैलीन	$C_{20}HgO_9N(HgOCOCH_3)_2$ F=43.23; C=43.31	1.00	1.50	0.156	0.312
7.	फ्लोरोगुलिसिनल-3-नाइट्रोथैलीन	$C_{30}HgO_9N(HgOCOCH_3)_2$ F=43.26; C=43.31	1.50	3.50	0.312	0.625
8.	*मरकुरोक्रोम	—	—	—	0.078	0.156

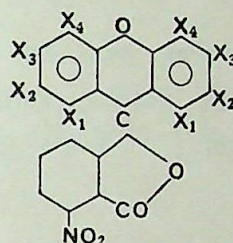
*जात यौगिक

परिणाम तथा विवेचना

जब 3-नाइट्रोथैलिक अम्ल को फीनाल^[41] तथा रिसार्सिनल के साथ संघनित किया जाता है तो दो प्रकार के रंजक प्राप्त होते हैं एक तो फीनाथैलीन प्रकार की संरचना के और दूसरे फ्लोरेसीन प्रकार की संरचना के। हमें भी फीनाथैलीन तथा फ्लोरेसीन प्रकार के व्युत्पन्न प्राप्त हुये जिन्हें निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है।



प्रकार I (फीनाथैलीन व्युत्पन्न)



प्रकार II (फ्लोरेसीन व्युत्पन्न)

प्रकार I

$$1. X_3=OH, X_4=CH_3, X_1=X_2=X_5=H$$

प्रकार II

$$2. X_3=CH_3, X_1=X_2=X_4=H$$

$$3. X_3=OH, X_1=CH_3, X_2=X_4=H$$

$$4. X_4=OH, X_1=X_2=X_3=H$$

$$5. X_2=OX, X_1=X_3=X_4=H$$

$$6. X_3=X_4=OH, X_1=X_2=H$$

$$7. X_1=X_3=OH, X_2=X_4=H$$

संरचनात्मक अध्ययन

इन रंजकों की संरचनाएं गुणात्मक रीति से तथा स्पेक्ट्रोस्कोपिकीय विधि से भी निश्चित की गई। गुणात्मक निर्धारण में कैटेकाल-3-नाइट्रोथैलीन रंजक (1.0 ग्रा०) को KOH की पुटिकाओं के साथ संगलित किया गया और संगलित पिंड को आसुत जल से निष्कर्षित करके छाना गया। अवशेष (A) को सुरक्षित रख लिया गया और छनित को तनु हाइड्रोक्लोरिक अम्ल से उपचारित करने पर अवक्षेप (B) प्राप्त हुआ। छानने के बाद छनित को ईथर विलायक से अमिकृत किया गया। वाष्पन से अवशेष (C) प्राप्त हुआ। (A), (B) तथा (C) के रासायनिक विश्लेषण से पता चला कि वे क्रमशः कैटेकाल-3-नाइट्रोथैलीन, -3-नाइट्रोथैलिक अम्ल तथा कैटेकाल थे। इनकी पुष्टि मिश्रित गलनांक ज्ञात करके की गई।

क्षारीय माध्यम में जो UV स्पेक्ट्रा लिए गये उनसे λ_{max} के जो मान प्राप्त हुए वे फीनाल-3-नाइट्रोथैलीन (560 nm) तथा रिसार्सिनल-3-नाइट्रोथैलीन (510 nm) के स्पेक्ट्रा के संगत हैं। IR

स्पेक्ट्रा पर्किन-एलमर स्पेक्ट्रोफोमीटर में अंकित किये गए और जो आवृत्तियाँ मिली वे फीनाप्यैलीन^[15] की सूचित आवृत्तियाँ से काफी मिलती-जुलती हैं। इसी प्रकार *o*-क्रेसाल; *m*-क्रेसाल-तथा ओनिसाल-3-नाइट्रोथैलीन में- CH_3 के संगत क्रमशः 1460, 1450 तथा 1470 cm^{-1} की लाक्षणिक आवृत्तियाँ प्राप्त हुईं। यही नहीं, 1500-1570 cm^{-1} के क्षेत्र में अभिलाक्षणिक अवशोषण से ऐरोमेटो- NO_2 समूह की पुष्टि होती है।

ओषधीय अध्ययन :

इन रंजकों के सोडियम लवणों तथा पारद व्युत्पन्नों में प्रतिजीवाणुक सक्रियता पाई गई। स्टैफिलोकोकस ऑरियस तथा बैक्टीरियम कोलाई पर इनकी जीवाणुनाशक क्रिया के निर्धारण के लिये सोडियम लवण की वह मात्रा (मिग्रा०/मिली०) ज्ञात की गई जो 24वें ब्राथ कल्चर के एक फंदे भर की वृद्धि को रोक सके।

रंजकों के पारद व्युत्पन्नों के लवणों की जीवाणुनाशी सक्रियता रंजकों के सोडियम लवणों की अपेक्षा अधिक पाई गई। इनकी जीवाणुनाशक सक्रियता की तुलना मरक्यूरोक्रोम^[9,10] के साथ ज्ञात की गई जो एक ज्ञात यौगिक है। यह देखा गया कि *O*-क्रेसाल तथा कैटेकाल-3-नाइट्रोथैलीन के पारद व्युत्पन्नों के सोडियम लवणों की जीवाणुनाशन सक्रियता मरक्यूरोक्रोम से अधिक थी। सारणी 2 में रंजकों के प्रतिजीवाणुक गुण प्रदर्शित हैं।

निर्देश

1. बायर, Ber., 1871, 4 659.
2. वही, Ber., 1876, 9, 1230.
3. वही, Ber., 1879, 12, 237.
4. ओर्नडाफ तथा ब्रूवर, वही, 1890, 26, 118.
5. कोपिसैरो, एम०, J. Chem. Soc., 1920, 117, 209.
6. बिर्जे तथा ऐक्री, J. Amer. Chem. Soc., 1919, 41, 1031.
7. सिंह, ई० तथा गुप्ता, बी०सी०, J. Ind. Chem. Soc. 1972, 9, 49.
8. रोहतगी, एच० एल०, Ind. J. Appl. Chem., 1958, 21, 102.
9. रोहतगी, एच० एल० तथा शर्मा, उमा, Ind. J. Appl. Chem., 1959, 22, 128.
10. रोहतगी, एच० एल० तथा वर्मा, वी० के०, Ind. J. Appl. Chem., 1963, 26, 26.
11. अग्रवाल, ए० एन० तथा रोहतगी, एच० एल०, J. Ind. Chem. Soc. 1964, 41, 578.

12. Organic Synthesis, Coll. Vol. I, Edn. II गिलमान ब्लाट, p-408.
13. ब्रहाइट, ई० सी०, J. Amer. Chem. Soc., 1920, 2335.
14. अण्डरवुड, जूनियर, एच० डब्लू० तथा वेकमैन, आर० एल०, J. Amer. Chem. Soc., 1981, 53, 1939.
15. ग्रासेल्ली, जे० जी० तथा रिचरी, डब्लू० एल० आर०, "Atlas of spectral data and Physical constants for organic compounds", भाग IV, द्वितीय संस्करण 1975 पृष्ठ 900.

अशुद्धिकृत मैग्नीशियम नाइट्रेट का स्पेक्ट्रोफोटोमीटरी अध्ययन

एम० एन० बापट

भौतिकी विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—फरवरी 16, 1982]

सारांश

फास्फर (phosphor) अनुसंधान एवं विश्लेषण में फास्फर की आणविक संरचना, विकृतियाँ एवं आयनों के समावेश सम्बन्धी जानकारी काफी महत्वपूर्ण होती है। अकार्बनिक फास्फर सामान्यतया ठोस (चूर्ण अथवा रवा) एवं अपारदर्शक होते हैं। फास्फर के विद्युत ताप एवं विकिरण (radiations) के साथ वर्तन आचरण से ठोस अवस्था भौतिकी अध्ययन में सुविधा हुई है। मैग्नीशियम आक्साइड का शुद्ध रूप में प्रकाशिक विश्लेषण^[1,2], विद्युतीय प्रभाव^[3], विकिरण एवं तत्पश्चात् उष्मीय प्रभाव^[4,5] का विश्लेषण बहुतायत से हुआ है। हमने अशुद्धिकृत मैग्नीशियम आक्साइड के लिये विभिन्न प्रभावों का अध्ययन किया है^[6] जिसमें अशुद्धि यूरोपियम के प्रभाव का वर्णन अन्यत्र भी^[7] उपलब्ध है। किन्तु सीरियम के सम्बन्ध में जो शंकायें उपस्थित हुईं उसके परिप्रेक्ष्य में यह आवश्यक था कि किसी अन्य विधि से सीरियम की उपस्थिति की पुष्टि की जावे। अतः स्पेक्ट्रोफोटोमीटरी विधि का उपयोग अशुद्धिकृत मैग्नीशियम नाइट्रेट पर किया गया।

Abstract

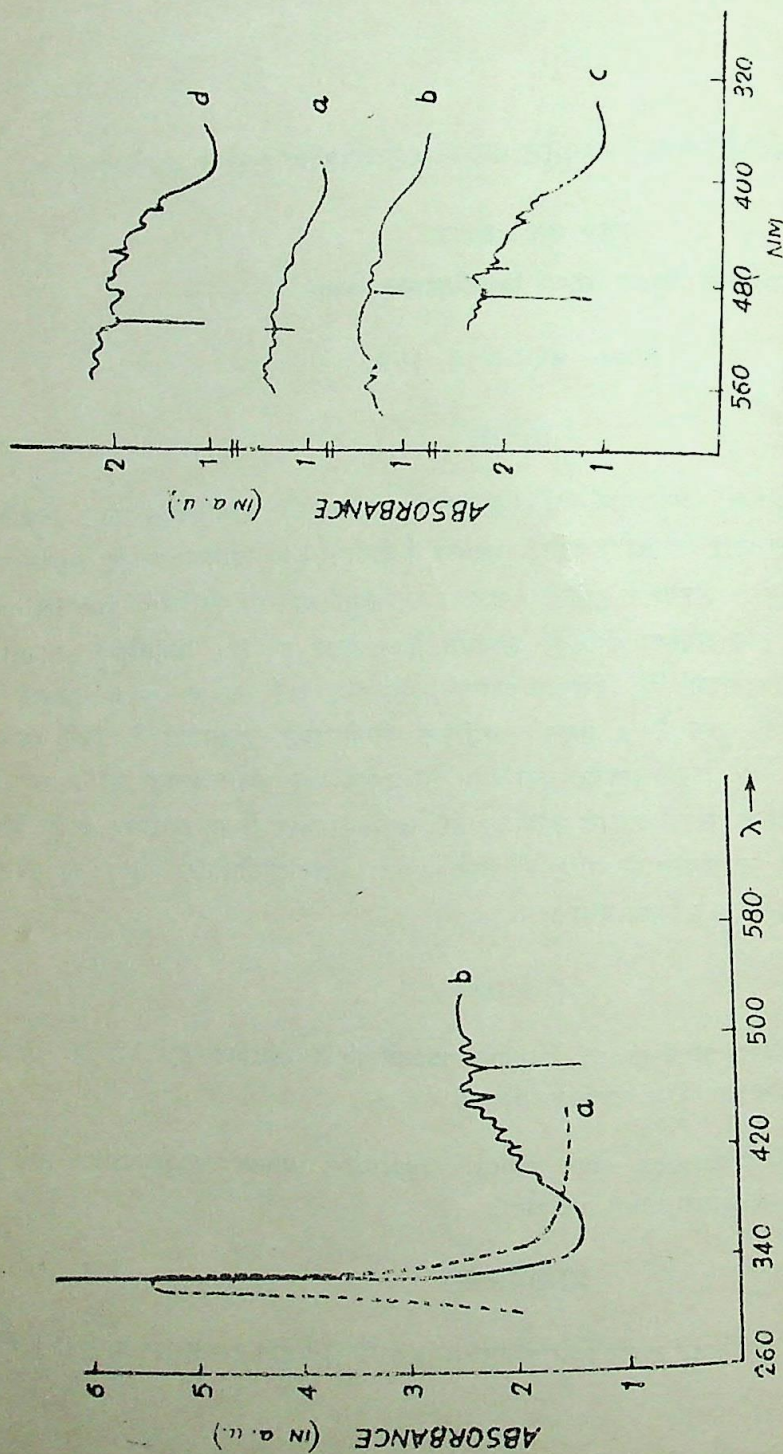
Spectrophotometric studies of impure magnesium nitrate By M. N. Bapat, Physics Department, Sagar University, Sagar

Spectrophotometric studies were made regarding impure magnesium nitrate using cerium nitrate and europium nitrate.

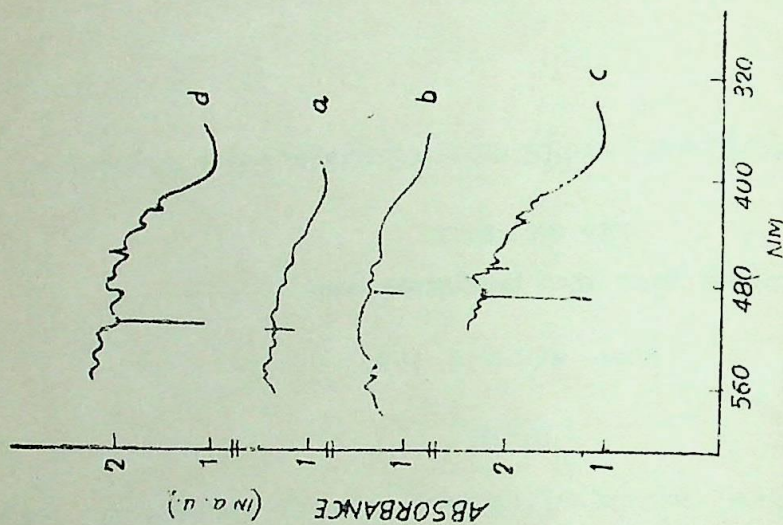
प्रायोगात्मक

प्रामाणिक मैग्नीशियम नाइट्रेट को द्विआसवित पानी में घोला गया। इस प्रकार प्राप्त 0.1 M के मातृद्रव्य में

1. लीथियम नाइट्रेट 1 प्रतिशत मिलाया।



चित्र 1 सैर्नीशियम नाइट्रेट के अणुद्विकृत विलयन का अवशोषण स्पेक्ट्रम ।
 (a) टंगस्टन स्रोत में
 (b) ड्यूटेरियम लैम्प में ।



चित्र 2 दृश्य क्षेत्र में अणुद्विकृत सैर्नीशियम नाइट्रेट के विलयन का अवशोषण स्पेक्ट्रम 480 nm के पास पारदर्शी रेखा की स्थिति ।

(a) शुद्ध $\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$ (b) $\text{Mg}(\text{NO}_3)_2 + \text{Li}$
 (c) $\text{Mg}(\text{NO}_3)_2 + \text{Li} + \text{Eu}$ (d) $\text{Mg}(\text{NO}_3)_2 + \text{Li} + \text{Ce}$

2. लीथियम नाइट्रेट 1 प्रतिशत एवं यूरोपियम नाइट्रेट 0.1 प्रतिशत मिलाया ।
3. लीथियम नाइट्रेट 1 प्रतिशत एवं यूरोपियम नाइट्रेट 1 प्रतिशत मिलाया ।
4. लीथियम नाइट्रेट 1 प्रतिशत एवं सीरियम नाइट्रेट 0.1 प्रतिशत मिलाया ।
5. लीथियम नाइट्रेट 1 प्रतिशत एवं सीरियम नाइट्रेट 1 प्रतिशत मिलाया ।

उक्त घोल क्रम से क्यूबेट (cubets) में रखे एवं GCA Mc Pherson स्पेक्ट्रोफोटोमीटर की सहायता से अवशोषण स्पेक्ट्रम प्राप्त किये गये ।

सारणी 1

मैग्नीशियम नाइट्रेट के विभिन्न न्यादर्श के लिये अवशोषण स्पेक्ट्रम एवं अवशोषण घटक

क्रमांक	न्यादर्श (विलयन रूप में)					
	$\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$	$\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$ + Li	$\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$ + Li + Eu (आधिक्य)	$\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$ + Li + Eu	$\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$ + Li + Ce (आधिक्य)	$\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$ + Li + Ce in
1. 320 nm						
उच्च का स्थान	323 nm	318 nm	320 nm	318 nm	328 nm	328 nm
अवशोषण घटक	0.57*	0.56*	0.58*	0.54*	0.80*	0.76*
2. दृश्य क्षेत्र						
का उच्च एवं	350 nm	520 nm	475 nm	475 nm	485 nm	488 nm
अवशोषण घटक	0.07	0.08	0.24	0.27	0.27	0.28
3. पारदर्शी रेखा						
की स्थिति एवं	505 nm	480 nm	485 nm	485 nm	498 nm	500 nm
अवशोषण घटक	0.03	0.02	0.11	0.14	0.13	0.16

* टंगस्टन स्रोत के लिये

स्पेक्ट्रोफोटोमीटरिक विधि से घोल में उपस्थित अशुद्धि का प्रभाव देखा जा सकता है । सीरियम की उपस्थिति भी उक्त प्रयोगों से स्पष्ट होती है ।

परिणाम एवं विवेचना

सामान्यतया ड्यूटेरियम स्रोत से टंगस्टन स्रोत की अपेक्षा अवशोषण तिगुना था। प्रत्येक न्यादर्श में 320 (nm) पर एक अवशोषण उच्च प्राप्त हुआ (चित्र 1)। इससे कम तरंग दैर्घ्य (wave length) पर सतत अवशोषण परिलक्षित होता है। 400 nm से 560 nm तक सतत अवशोषण की अपेक्षा $\sim 1/25$ प्राप्त हुआ (चित्र 2) जिसकी रचना एवं आकार न्यादर्श में उपस्थित घटकों के साथ परिवर्तित होती है (सारणी 1 देखें)।

(अ) प्रमुख अवशोषण 320 nm का मापांक अशुद्धीकरण के साथ परिवर्तित होता है।

(ब) विशिष्ट अशुद्धि के सान्द्रण के साथ 320 nm का आवशोषण घटक कम एवं दृश्य क्षेत्र का बढ़ता है।

(स) दृश्य क्षेत्र में पारदर्शी रेखा की स्थिति विभिन्न अशुद्धियों के लिये अलग-अलग स्थान पर किन्तु एक ही अशुद्धि के लिये सान्द्रण से अप्रभावित रहती है।

(द) पारदर्शकता रेखा अशुद्धि के लिये संवेदनशील है। अधिक अशुद्धि सांद्रता पर कुछ नई पारदर्शक रेखाएँ प्रकट होने लगती हैं।

निर्देश

1. जॉनसन, पी० डी०, Phys Rev, 1954, 96, 845.
2. पिरिया, डब्लू० टी०, Phys Rev 1954, 96, 824.
3. लिमपिकी, ए०, Phys Soc. 1953 66, B, 281.
4. दत्ता, एस०, बोसवारा, टी० एम० तथा होल्ट डी०बी०, J. Phys Chem Soc 1979), 40, 567.
5. सत्यमूर्ति, ए०, पी एचडी थीसिस, बम्बई विश्वविद्यालय 1975.
6. वापट, एम० एन०, तथा शिवरमन, एस०, J. Sci. Res 1982, 4
7. लचनर, के०, Proc. of Lumin. Conf. 1966, Budapest, 1466.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 26, No. 4, 1983

फूरियर श्रेणी की यूलर संकलनीयता की नई कसौटी

पी०डी० कैथल तथा एच०एल० शुक्ला
गणित विभाग, गवर्नमेण्ट कालेज, शहडोल (म०प्र०)

[प्राप्त—सितम्बर 1, 1982]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में साहनी तथा कैथल से परिणाम का सार्वीकरण (E, q) संकलनीयता में एक प्रमेय के द्वारा किया गया है।

Abstract

A new criterion for Euler summability of Fourier series. By P. D. Kathal and H.L. Shukla, Department of Mathematics, Government College, Shahdol (M.P.).

In the present paper we have generalised the result of Sahney and Kathal to (E, q) summability by proving :

Theorem : If (i) $\int_0^t |\phi(t)| dt = O(t)$

and $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi/n}^{\eta} \frac{|\phi(t) - \phi(t + \pi/n)|}{t} \exp \left\{ - \left(\frac{\eta^2}{2\pi^2} \right) t^2 \right\} dt = O(1)$

for any positive constant η , then the Fourier series of $f(x)$ is summable (E, q) , $(q > 0)$ to s at x .

It is also interesting to note that :

(1) For $q=0$, (E, q) summability is equivalent to convergence and our theorem reduces to the classical Lebesgue criterion of convergence.

(2) It answers one of the questions raised by Holland, Sahney and Tzimbario and extends their result on $(E, 1)$ summability to (E, q) , $(q > 0)$.

1. परिभाषा तथा संकेतन

माना कि $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ एक अनन्त श्रेणी है जिसमें आंशिक योगों $\{S_n\}$ का अनुक्रम है। अनुक्रम S_n के यूलर माध्यों को $q > 0$ के लिए

$$E_n = (1+q)^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} S_k$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है। यदि $E_n \rightarrow S$ ज्यों-ज्यों $n \rightarrow \infty$ तो अनुक्रम $\{S_n\}$ अथवा श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty}$ परि-

भाषित संकलनीय (E, q) ($q > 0$) तक हैं। सांकेतिक रूप में हम लिखेंगे^[1]

$$\{S_n\} \in s(E, q), \text{ क्योंकि } q > 0$$

स्पष्ट है कि $(E, 0)$ अभिसरण के तुल्य है तथा निम्नलिखित प्रमेय ज्ञात हैं।
प्रमेय A^[1]

यदि $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in s(E, q)$, ($q > 0$), तो $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in s(E, \bar{q})$, क्योंकि $\bar{q} > q$.

प्रमेय B^[1]

यदि $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in s(E, q)$, ($q > 0$), तो $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in s(B)$, जहाँ (B) से बोरेल के घातांकी माध्यों का बोध होता है।

माना कि

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

फलन $f(x)$ की फूरियर श्रेणी है जो लेबेस्क के अर्थ में अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में संकलनीय है और इस परास से बाहर आवर्त 2π के साथ आवर्ती है। और भी

माना कि

$$\phi(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2s}{2} \text{ जहाँ } s \text{ अचर है}$$

$$E(n, t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \sin kt.$$

2. विषय प्रवेश

फूरियर श्रेणी की बोरेल संकलनीयता का अध्ययन टाकाहासी तथा वैंग^[2], साहनी^[3] एवं साहनी तथा कैथल^[4] द्वारा क्रमशः निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत हो चुका है :

$$\phi(t) = o(1/\log 1/t), \text{ ज्यों-ज्यों } t \rightarrow 0^+ \quad (2.1)$$

$$\int_0^t |\phi(t)| dt = o\left(\frac{t}{\log 1/t}\right), \text{ ज्यों-ज्यों } t \rightarrow 0^+ \quad (2.2)$$

$$\int_0^t |\phi(t)| dt = o(t), \text{ ज्यों-ज्यों } t \rightarrow 0^+ \quad (2.3a)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\pi/p}^{\eta} \frac{|\phi(t) - \phi(t + \pi/p)|}{t} \exp\{-p(1 - \cos t)\} dt = o(1) \quad (2.3b)$$

जहाँ η एक अचर है ।

अनुरूप प्रतिबन्धों के अन्तर्गत प्रमेय (B) से फूरियर श्रेणी की (E, q) संकलनीयता सम्भावित है । चन्द्रा^[5,6] ने हाल ही में (2.1) तथा (2.2) जैसे प्रतिबन्धों के अन्तर्गत फूरियर श्रेणी की (E, q) संकलनीयता स्थापित की है । इसी प्रकार का परिणाम शेष दो प्रतिबन्धों (2.3 a b) के अन्तर्गत भी सम्भावित है । इसी लक्ष्य से हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे :

प्रमेय — यदि

$$\int_0^t |\phi(t)| dt = o(t), \text{ ज्यों-ज्यों } t \rightarrow 0^+ \quad (2.4)$$

तथा

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi/n}^{\eta} \frac{|\phi(t) - \phi(t + \pi/n)|}{t} \exp\left\{-\left(\frac{b}{2\pi^2}\right)nt^2\right\} dt = o(1) \quad (2.5)$$

जहाँ η एक अचर है तो फूरियर श्रेणी बिन्दु x पर s तक संकलनीय (E, q) ($q > 0$) है

3. हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी ।

प्रमेयिका 1 — यदि $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1$ तथा

$$\int_0^t |\phi(t)| dt = o(t), \text{ ज्यों-ज्यों } t \rightarrow 0^+;$$

तो

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi/n}^{(\pi/n)^\alpha} \frac{\phi(t)}{t} \frac{\left[\sin \left\{ n \tan^{-1} \left(\frac{\sin t}{q + \cos t} \right) \right\} - \sin \left(\frac{nt}{q+1} \right) \right]}{\exp \left\{ \frac{q}{2\pi^2} nt^2 \right\}} dt$$

उपपत्ति—अन्तिम समाकल पर विचार करने पर

$$\begin{aligned} & \int_{\pi/n}^{(\pi/n)^\alpha} \frac{\phi(t)}{t} \frac{\left[\sin \left\{ n \tan^{-1} \left(\frac{\sin t}{q + \cos t} \right) \right\} - \sin \left(\frac{nt}{q+1} \right) \right]}{\exp \left\{ \frac{q}{2\pi^2} nt^2 \right\}} dt \\ &= \int_{\pi/n}^{(\pi/n)^\alpha} \frac{\phi(t)}{t} \frac{\left[\sin \left\{ n \tan^{-1} \left(\frac{\sin t}{q + \cos t} \right) \right\} - \sin \left(\frac{nt}{q+1} \right) \right]}{\exp \left\{ \frac{q}{2\pi^2} nt^2 \right\}} dt \\ &= o \left[\frac{1}{\exp \left\{ \frac{q}{2\pi^2} n, \frac{\pi^2}{n^2} \right\}} \right] \int_{\pi/n}^{(\pi/n)^\alpha} \frac{\phi(t)}{t} \left[\sin \left\{ n \tan^{-1} \left(\frac{\sin t}{q + \cos t} \right) \right\} - \sin \left(\frac{nt}{q+1} \right) \right] dt \\ &= \int_{\pi/n}^{(\pi/n)^\alpha} \frac{|\phi(t)|}{t} o(nt^3) dt \\ &= o(n^{1-2\alpha}) \int_{\pi/n}^{(\pi/n)^\alpha} |\phi(t)| dt \\ &= o(n^{1-3\alpha}) \\ &= o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } p \rightarrow \infty, \text{ क्योंकि } a \geq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

इस तरह उपपत्ति पूर्ण हुई।

प्रमेयिका 2—यदि $0 \leq a < 1$ तथा

$$\int_0^t |\phi(t)| dt = o(t) \text{ ज्यों-ज्यों } t \rightarrow 0^+ \text{ तो}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi/n}^{(\pi/n)^\alpha} \frac{\phi(t + \pi/n)}{t} \left[\frac{1}{\exp \left\{ \frac{qn}{2\pi^2} t^2 \right\}} - \frac{1}{\exp \left\{ \frac{qn}{2\pi^2} (t + \pi/n)^2 \right\}} \right] \sin \left(\frac{nt}{q+1} \right) dt = 0$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\pi/n}^{(\pi/n)^\alpha} \frac{\phi(t+\pi/n)}{t} o \left[\frac{t}{\exp \left\{ \frac{nq t^2}{2\pi^2} \right\}} \right] dt \\
&= o \left[\frac{1}{\exp \left\{ \frac{nq}{2\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{n^2} \right\}} \right] \int_{\pi/n}^{(\pi/n)^\alpha} |\phi(t+\pi/n)| dt \\
&= o[(\pi/n)^\alpha + \pi/n] \\
&= o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

इस तरह उपपत्ति पूरी हुई ।

प्रमेयिका 3

$$\begin{aligned}
E(n, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} q^{n-k} \sin kt \\
&= I_m \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} e^{ikt} \right], \text{ जहाँ } I_m \text{ कात्पनिक अंश का सूचक है ।} \\
&= I_m (q + e^{it})^n \\
&= (1 + q^2 + 2q \cos t)^{n/2} \sin \left\{ n \tan^{-1} \left(\frac{\sin t}{q + \cos t} \right) \right\}
\end{aligned}$$

प्रमेयिका 4 $0 < t \leq 1/2$ तथा $0 < q < 1$ के लिये

$$\frac{(1 + q^2 + 2q \cos t)^{n/2}}{(1 + q)^n} < \frac{1}{\exp \left\{ \frac{nq}{2\pi^2} t^2 \right\}}$$

इसकी उपपत्ति रे^[7] की प्रमेयिका 1 तथा 2 की सहायता से प्राप्त की जा सकती है ।

प्रमेयिका 5^[8]

$$\text{यदि } \int_0^t |\phi(t)| dt = o(t), \text{ ज्यों-ज्यों } t \rightarrow 0^+$$

तो

$$\int_{\pi/n}^{2\pi/n} \frac{|\phi(t)|}{t} \sin \left(\frac{nt}{q+1} \right) dt = o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty$$

4. प्रमेय की उपपत्ति

ज़िगमुंड^[9] का अनुसरण करने पर फूरियर श्रेणी के n वें आंशिक योग को

$$\begin{aligned} S_n - s &= 2/\pi \int_0^\pi \frac{\phi(t)}{t} \sin nt \, dt + o(1) \\ &= 2/\pi \left[\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right] \frac{\phi(t)}{t} \sin nt \, dt + o(1) \\ &= Q_1 + Q_2, \text{ माना} \end{aligned}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ $\delta < \pi/2$ स्थिर है।

अब प्रत्येक स्थिर δ के लिये, $\frac{\phi(t)}{t} = L(\delta, \pi)$ तथा Q_2 शून्य की ओर अग्रसर होता है; चूँकि n

अग्रसर होता है ∞ तक तथा संकलन विधि की नियमितता से Q_2 का (E, q) परिवर्त भी शून्य की ओर अग्रसर होता है। अतः प्रमेय सिद्ध करने में केवल इतनी ही आवश्यकता होगी कि ज्यों-ज्यों $n \rightarrow \infty$, Q_1 का (E, q) परिवर्त शून्य की ओर अग्रसर होता है।

Q_1 का (E, q) परिवर्त

$$E_n = 2/\pi (1+q)^{-n} \int_0^\delta \frac{\phi(t)}{t} E(n, t) \, dt$$

द्वारा दिया जाता है। क्रमशः प्रमेयिका 3, 4 तथा 1 से

$$\begin{aligned} &= 2/\pi \int_0^\delta \frac{\phi(t)}{t} \frac{(1+q^2+2q \cos t)^{n/2}}{(1+q)^n} \cdot \sin \left\{ n \tan^{-1} \left(\frac{\sin t}{q + \cos t} \right) \right\} dt \\ &= 2/\pi \int_0^\delta \frac{\phi(t)}{t} \frac{\sin \left\{ n \tan^{-1} \left(\frac{\sin t}{q + \cos t} \right) \right\}}{\exp \left\{ \left(\frac{nq}{2\pi^2} \right) t^2 \right\}} dt \\ &= 2/\pi \int_0^\delta \frac{\phi(t)}{t} \frac{\sin (nt/q + 1)}{\exp \left\{ \left(\frac{nq}{2\pi^2} \right) t^2 \right\}} dt \\ &= 2/\pi \left[\int_0^{\pi/n} + \int_{\pi/n}^{(\pi/n)\alpha} + \int_{(\pi/n)\alpha}^\delta \right] \cdot \frac{\phi(t)}{t} \frac{\sin (nt/q + 1)}{\exp \left\{ \left(\frac{nq}{2\pi^2} \right) t^2 \right\}} dt \\ &= 2/\pi [I_1 + I_2 + I_3], \text{ माना} \end{aligned}$$

जहाँ $\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2}$.

इनमें से प्रथम समाकल पर विचार करने पर

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/n} \frac{\phi(t)}{t} \frac{\sin(nt/q+1)}{\exp\left\{\left(\frac{nq}{2\pi^2}\right)t^2\right\}} dt \\ &= \int_0^{\pi/n} \frac{|\phi(t)|}{t} \cdot O(nt) dt \\ &= o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

इसके आगे, द्वितीय माध्यमान प्रमेय तथा समाकल $\int |\phi(t)| dt$ के अन्त अंश से हमें निम्न की प्राप्ति होती है।

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{(\pi/n)a}^{\delta} \frac{\phi(t)}{t} \frac{\sin(nt/q+1)}{\exp\left\{\left(\frac{nq}{2\pi^2}\right)t^2\right\}} dt \\ &= o\left[\frac{na}{\exp\left\{\left(\frac{nq}{2\pi^2}\right) \cdot \frac{n^2a}{n^2a}\right\}}\right] \cdot \int_{(\pi/n)a}^{\delta} |\phi(t)| dt \\ &= o\left[\frac{n}{\exp(A n^{1-2a})}\right], \text{ जहाँ } A \text{ घनात्मक अचर है :} \\ &= o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty, \text{ क्योंकि } a < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

अन्त में,

$$\begin{aligned} 2I_2 &= \int_{\pi/n}^{(\pi/n)\alpha} \frac{\psi(t)}{t} \frac{\sin(nt/q+1)}{\exp\left\{\left(\frac{nq}{2\pi^2}\right)t^2\right\}} dt \\ &\quad - \int_0^{(\pi/n)\alpha - \pi/n} \frac{\phi(t) + \pi/n}{(t + \pi/n)} \frac{\sin\{n(t + \pi/n)/q + 1\}}{\exp\left\{\left(\frac{nq}{2\pi^2}\right)(t + \pi/n)^2\right\}} dt \\ &= \int_{\pi/n}^{(\pi/n)\alpha} \frac{\phi(t) - \phi(t + \pi/n)}{t} \frac{\sin(nt/q+1)}{\exp\left\{\left(\frac{nq}{2\pi^2}\right)t^2\right\}} dt \\ &\quad + \int_{\pi/n}^{(\pi/n)\alpha} \frac{\phi(t + \pi/n)}{t} \left[\frac{1}{\exp\left\{\left(\frac{nq}{2\pi^2}\right)t^2\right\}} - \frac{1}{\exp\left\{\left(\frac{nq}{2\pi^2}\right)(t + \pi/n)^2\right\}} \right] \\ &\quad \sin\left(\frac{nt}{q+1}\right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\pi/n}^{(\pi/n)\alpha} \frac{\phi(t+\pi/n)}{\exp\left\{\left(\frac{nq}{2\pi^2}\right) \cdot (t+\pi/n)^2\right\}} \left[1/t - \frac{1}{t+\pi/n}\right] \sin\left(\frac{nt}{q+1}\right) dt \\
& - \int_0^{\pi/n} \frac{\phi(t+\pi/n)}{t+\pi/n} \frac{\sin(nt/q+1)}{\exp\left\{\left(\frac{nq}{2\pi^2}\right) (t+\pi/n)^2\right\}} dt \\
& + \int_{(\pi/n)\alpha-\pi/n}^{(\pi/n)\alpha} \frac{\phi(t+\pi/n)}{t+\pi/n} \frac{\sin(nt/q+1)}{\exp\left\{\left(\frac{nq}{2\pi^2}\right) (t+\pi/n)^2\right\}} dt \\
& = I_{2.1} + I_{2.2} + I_{2.3} + I_{2.4} + I_{2.5}, \text{ माना}
\end{aligned}$$

$I_{2.1}$, $I_{2.2}$ तथा $I_{2.4}$ शून्य की ओर अग्रसर होते हैं ज्यों-ज्यों $n \rightarrow \infty$ (क्रमशः 2.5, प्रमेयिका 2 तथा 5 से—चर को बदले के बाद)

अब

$$\begin{aligned}
I_{2.3} &= o(1/n) \int_{\pi/n}^{(\pi/n)\alpha} \frac{|\phi(t+\pi/n)|}{t(t+\pi/n)} dt \\
&= o\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right) \\
&= o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty, \text{ क्योंकि } \alpha < 1
\end{aligned}$$

तथा चर को बदलने, द्वितीय माध्यमान प्रमेय से तथा (2.4) से

$$\begin{aligned}
I_{2.5} &= o(n^\alpha) \cdot \int_{(\pi/n)\alpha}^{(\pi/n)\alpha+\pi/n} |\phi(t)| dt \\
&= o\left\{\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right\} \\
&= o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty, \text{ चूँकि } \alpha < 1.
\end{aligned}$$

अतः

$$E_n = o(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty.$$

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

टिप्पणी—हमारे प्रमेय से निम्नलिखित बातें स्पष्ट होती हैं :

(1) $q=0$ होने से यह फूरियर श्रेणी के अभिसरण की विख्यात लेबेस्क कसौटी प्रदान करती है।

(2) इससे हालैण्ड, साहनी तथा जिमबालारियो^[10] द्वारा उठाये गये एक प्रश्न का उत्तर प्राप्त होता है और उनके $(E, 1)$ से (E, q) , $(q > 0)$ पर प्राप्त परिणाम को विस्तृत करती हैं। (देखें प्रमेय A भी)।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० पी०एल० शर्मा का आभारी है जिन्होंने इस पत्र की तैयारी में सुझाव दिये।

निर्देश

1. हार्डी, जी०एच० Divergent Series, आक्सफोर्ड, 1949
2. टाकाहाशी, टी० तथा वेंग, एफ०टी०, Proc. Phy. Math. Soc. Japan, 1936, 18, 153.
3. साहनी, बी०एन०, Bull. Un. Mat. Italy 1961, 19, 44.
4. साहनी, बी०एन० तथा कैथल, पी०डी०, Canad. Math. Bull., 1969, 12, 573.
5. चन्द्रा, पी०, Ranchi Univ. Math. Jour. India, 1974, 5, 53.
6. वही, Rivista de la Academia de Ciencias exactas Fisico-Quimicas Y Nat. de Zaragoza, pp. 47.
7. रे, बी०के०, Indian J. Math, 1969, 11,
8. सिंह, बी०, P.A.M.S. 1956, 7, 796.
9. जिगमुंड, ए०, Trigonometric series, भाग 1, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, 1959।
10. हालैण्ड, ए०एस०बी०, साहनी, बी०एन० तथा जिमबालारियो जे०, Bullettino U.M.I. 1975, 12, 315.

ढालू आधार शैल पर क्षणिक भौम जल प्रवाह के लिए रिट्ज विधि का सम्प्रयोग

वी० एस० पाण्डेय, एस० के० पाण्डेय तथा आर० एस० पाण्डेय

सम्प्रयुक्त गणित अनुभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी,
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी-5

[प्राप्त—जनवरी 25, 1983]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में क्षोभ प्रविधि, लाप्लास रूपान्तर तथा रिट्ज विधि का उपयोग अप्रवेश्य ढालू आधार शैल पर अस्थायी भौम जल प्रवाह को बताने वाले अरैखिक अवकल समीकरण का हल प्राप्त करने के लिये किया गया है।

Abstract

Application of Ritz's procedure to transient groundwater flow on sloping bedrock.
By V. S. Pandey, S. K. Pandey and R. N. Pandey, Applied Mathematics Section,
School of Applied Sciences, Institute of Technology, Banaras Hindu University,
Varanasi-5.

In the present paper, perturbation technique, Laplace transform and Ritz's method have been applied to obtain the solution of nonlinear partial differential equation of parabolic type which describes the unsteady groundwater flow on impervious sloping bedrock. The problem under study concerns with the seepage from a canal to another with a sudden rising of the canal level as an upstream boundary condition, while the down stream level remains constant. Initially, both levels are equal. The water depth and outflow rate have been determined by using power series expansion.

मुक्त पृष्ठ तथा ढालू अप्रवेश्य आधार शैल वाले सरंध्र माध्यम में अस्थायी भौमजल प्रवाह को परावलयी प्रकार के अरैखिक आंशिक अवकल समीकरण द्वारा वर्णित किया जाता है।^[10]

$$\frac{\partial h}{\partial t} = k/s \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + KI/s \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1)$$

जहाँ $h=h(x,t)$ अप्रवेश्य निचली परिसीमा से मुक्त सतह की जल गहराई, k द्रवचालित चालकता, S संग्रह गुणांक, x क्षैतिज निर्देशांक, t समय तथा L निचली परिसीमा का ढाल है। उपर्युक्त समीकरण में अनेक प्राचल हैं जिनसे हल की विवेचना करने में कठिनाई होती है अतः उपर्युक्त समीकरण को विमाहीन स्वरूप प्रदान करना उपयुक्त रहेगा।

विमाहीन चरों को प्रविष्ट करने पर अर्थात्

$$H = \frac{h}{h_0} : \text{विमाहीन जल गहराई}$$

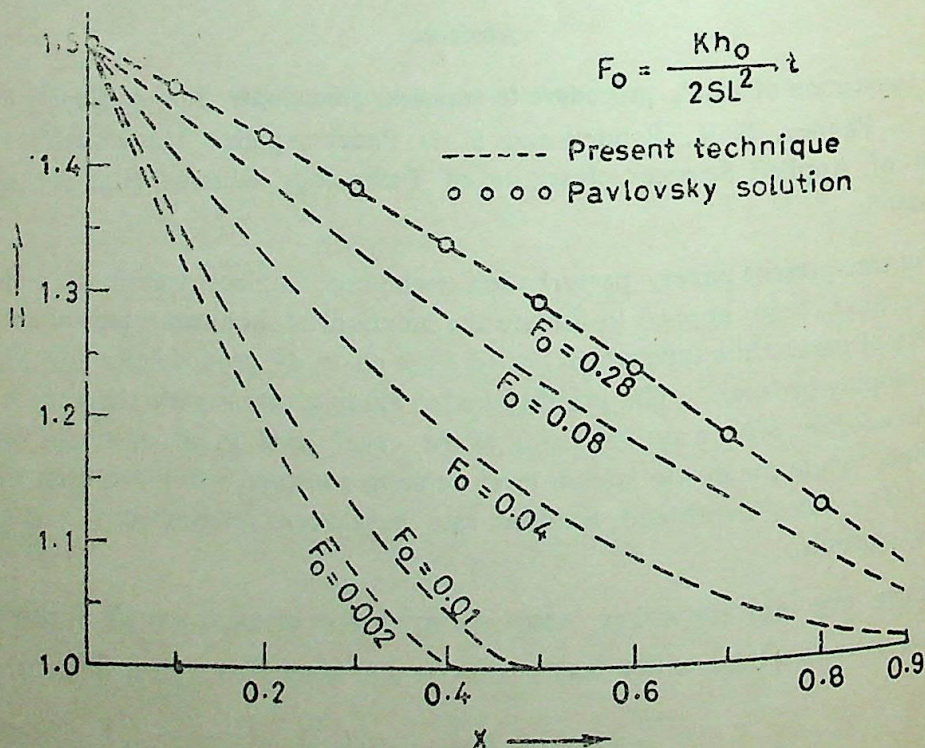
$$X = \frac{x}{L} : \text{विमाहीन दूरिक निर्देशांक}$$

$$F_0 = \frac{Kh_0}{2SL^2} t : \text{विमाहीन समय}$$

समीकरण (1) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$\frac{\partial H}{\partial F_0} = \frac{\partial^2 H^2}{\partial X^2} + \alpha \frac{\partial H}{\partial X}, \quad (2)$$

जहाँ $\alpha = 2IL/h_0$, तथा h_0 एवं L क्रमशः अभिलक्षणिक गहराई तथा दूरी हैं।



चित्र 1. मुक्त पृष्ठ परिच्छेदिका $\alpha=0.5$, $H_2=1.5$ तथा $H_1=0.75$

अनेक कार्यकर्ताओं ने दो विधियों से निर्मेयों के हल प्राप्त किये हैं। ये हैं—सान्त अन्तर की विधि^[6,11,13] तथा सान्त तत्वों की विधि^[1,2,4,8,9,22]। फेंगकिस तथा जिमापूलस^[3] ने समीकरण (2) का हल $\alpha=1$ के लिये प्राप्त किया है।

प्रस्तुत प्रपत्र में हमने समीकरण (2) के प्राचल α के विभिन्न मानों के लिये जिनमें $0 < \alpha < 1$ की तुष्टि हो, हल प्राप्त किया है जिसमें क्षोभ विधि, लाप्लास रूपान्तर तथा रिट्ज विधि का उपयोग किया गया है। यह मान लिया गया है कि दोनों नहरों में मुक्त सतह का प्रारम्भिक स्तर तथा ऊपरी धारा का स्तर दोनों ही अचानक H_2 (स्थिरांक) उठ जाते हैं जबकि निचली धारा का स्तर H_1 पर स्थिर रह जाता है। ऐसी कल्पनाओं के अन्तर्गत प्रारम्भिक तथा परिसीमा प्रतिबन्धों का रूप क्रमशः निम्न प्रकार है।

$$H(X, 0) = 1 - \lambda X, \quad (3)$$

जहाँ

$$\lambda = (1 - H_1) = \alpha/2.$$

तथा

$$\left. \begin{aligned} H(0, F_0) &= H_2 \\ H(1, F_0) &= H_1 \end{aligned} \right\}, F_0 > 0, \quad (4)$$

यह भी कल्पना की गई कि विमाहीन गहराई में निम्नलिखित घातांक श्रेणी प्रसार होता है जो लघु प्राचल α के पदों में है

$$H(X, F_0) = H_2 + \alpha H^{*(1)}(X, F_0) + \alpha^2 H^{*(2)}(X, F_0) + \alpha^3 H^{*(3)}(X, F_0) + \dots, F_0 > 0. \quad (5)$$

(5) का उपयोग करते हुए विमाहीन गहराई $H(X, F_0)$ तथा बहिर्वाह प्रवाह Q के लिये व्यंजक निकाले गये हैं।

निर्मेय का हल

समीकरण (2) में श्रेणी (5) को रखने तथा α के समान घातों के गुणांकों की तुलना करने पर हमें निम्नलिखित समीकरणों की प्रणाली प्राप्त होती है

$$\frac{\partial H^{*(1)}}{\partial F_0} = 2H_2 \frac{\partial^2 H^{*(1)}}{\partial X^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H^{*(2)}}{\partial F_0} = 2H_2 \frac{\partial^2 H^{*(2)}}{\partial X^2} + \left\{ 2H^{*(1)} \cdot \frac{\partial^2 H^{*(1)}}{\partial X^2} + 2 \left(\frac{\partial H^{*(1)}}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial H^{*(1)}}{\partial X} \right\} \quad (7)$$

तथा

$$\frac{\partial H^{*(3)}}{\partial F_0} = 2H_2 \frac{\partial^2 H^{*(3)}}{\partial X^2} + \left\{ 2H^{*(1)} \frac{\partial^2 H^{*(2)}}{\partial X^2} + \left(4 \frac{\partial H^{(1)}}{\partial X} + 1 \right) \frac{\partial H^{*(2)}}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 H^{*(2)}}{\partial X^2} \cdot H^{*(2)} \right\}. \quad (8)$$

चूँकि प्रथम पद स्थिर है, λ तथा α ज्ञात हैं अतः हम यह मान लेते हैं कि फलन $H^{*(2)}$, $H^{*(3)}$... इत्यादि निम्नलिखित प्रारम्भिक प्रतिबन्धों की तुष्ट करते हैं

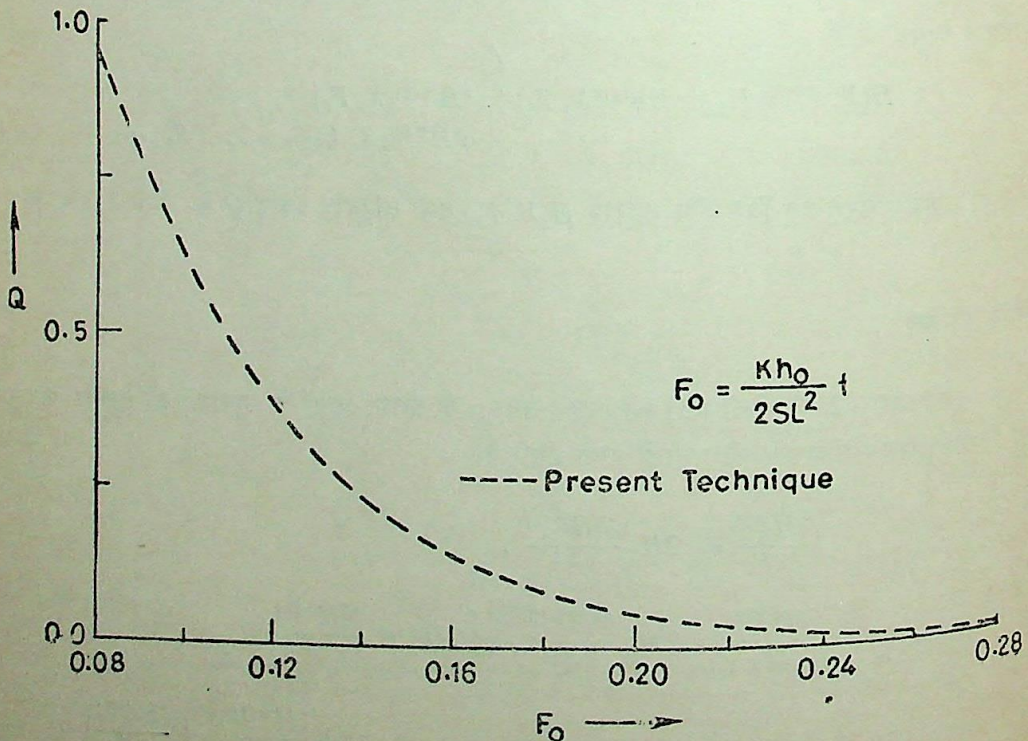
$$H^{*(2)}(X, 0) = H^{*(3)}(X, 0) \dots = 0,$$

$$H^{*(2)}(0, F_0) = H^{*(3)}(0, F_0) \dots = 0,$$

$$H^{*(2)}(1, F_0) = H^{*(3)}(1, F_0) \dots = 0.$$

उपर्युक्त कल्पनाओं को दृष्टि में रखते हुये हमें

$$H^{*(1)}(X, 0) = \frac{1 - H_2 - \lambda H}{2\lambda} \quad (9)$$



चित्र 2. विमाहीन बहिर्वाह दर

तथा

$$\left. \begin{aligned} H^{*(1)}(0, F_0) &= 0 \\ H^{*(1)}(1, F_0) &= \frac{H_1 - H_2}{2\lambda} \end{aligned} \right\}, F_0 > 0. \quad (10)$$

प्राप्त होते हैं।

अब हम उपर्युक्त समीकरणों की प्रणाली के लिये सरल सन्निकट हल प्राप्त करने की गणितीय विधि देंगे। अवकल समीकरण (6) में सार्विकृत समय F_0 के अनुसार लाप्लास रूपान्तर का व्यवहार करते तथा प्रारम्भिक प्रतिबन्ध (9) का प्रयोग करने पर

$$2H_2 \frac{d^2 H^{*(1)}}{dX^2} - sH^{*(1)} + \frac{1 - H_2 - \lambda X}{2\lambda} = 0 \quad (11)$$

प्राप्त होता है।

रूपान्तरित परिसीमा प्रतिबन्धों

$$H^*(0, s) = 0 \text{ एवं } H^{*(1)}(1, s) = \frac{H_1 - H_2}{2\lambda s}$$

के अन्तर्गत (11) का वास्तविक हल प्राप्त किया जा सकता है। किन्तु व्युत्क्रमण करने पर $H^{*(1)}(X, F_0)$ के लिये व्यंजक अनन्त श्रेणी के रूप में होगा जो $H^{*(2)}(X, F_0)$ तथा $H^{*(3)}(X, F_0)$ इत्यादि के निर्धारण के लिये असुविधाजनक होगी, अतः इससे बचाने के लिये हम रिट्ज की विधि का उपयोग करेंगे।

चूँकि परिसीमा प्रतिबन्ध असमांग हैं अतः हम $H^{*(1)}(X, s)$ को ज्ञात करने के लिये अध्यारोपण विधि का पालन करेंगे। इसके लिये हम रूपान्तरित जल गहराई के लिये परिच्छेदिका पर निम्न रूप में विचार करेंगे।

$$H^{*(1)}(X, s) = \frac{H_1 - H_2}{2s\lambda} X + X(1-X)\{b_1 + b_2 X + b_3 X^2 + \dots\}, \quad (12)$$

जहाँ b_1, b_2 तथा b_3 लाप्लास प्राचलों के फलन हैं। प्रथम सन्निकटीकरण के लिये लाप्लास रूपान्तर के अन्तर्गत हमें निम्न रूप में हल प्राप्त होगा

$$H^{*(1)}(X, s) = \left[\frac{P_5 X}{s} + X(1-X) \frac{P_4}{s + P_1} \right], \quad (13)$$

जो व्युत्क्रम से

$$H_1^{*(1)}(X, F_0) = [P_5 X + X(1-X)P_4 e^{-P_1 F_0}], F_0 > 0, \quad (14)$$

प्रदान करता है जहाँ

$$P_1 = 20H_2, P_2 = 5(2 - H_1 - H_2)/4\lambda,$$

$$P_3 = 5/4\lambda, \quad P_4 = (P_2 - \lambda P_3),$$

$$P_5 = (H_1 - H_2)/2\lambda.$$

संख्यात्मक दृष्टि से यह पाया गया है कि $H^{*(1)}(X, F_0)$ के प्रथम तथा द्वितीय सन्निकटनों के α के मान प्रायः एकरूप हैं जिनसे $0 < \alpha < 1$ की तुष्टि होती है अतः सरलता के लिये $H^{*(2)}(X, F_0)$ निर्धारित करने के लिये $H^{*(1)}(X, F_0)$ के प्रथम सन्निकटन $H_1^{*(1)}(X, F_0)$ पर ही विचार करते हैं।

$H^{*(2)}(X, F_0)$ का निर्धारण

अवकल समीकरण (7) में (14) से $H^{*(1)}(X, F_0)$ रखने पर तथा F_0 के प्रति लाप्लास रूपान्तर का उपयोग करने पर हमें

$$H^{*(2)}(0, s) = 0 \text{ और } H^{*(2)}(1, s) = 0.$$

परिसीमा प्रतिबन्धों के अन्तर्गत निम्नलिखित की प्राप्ति होती है।

$$2H \frac{d^2 H^{*(2)}}{2dX^2} - sH^{*(2)} + \left\{ \frac{P_6}{s} + (P_7 + P_8 X) \frac{P_4}{s + P_1} + \frac{2(1 - 6X + 6X^2)P_4^2}{s + 2P_1} \right\} = 0, \quad (15)$$

पुनः माना कि रूपान्तरित जल गहराई

$$H^{*(2)}(X, s) = X(1-X)\{C_1(s) + C_2(s)X + C_3(s)X^2 + \dots\}$$

परिच्छेदिका है।

पिछली दशा की भाँति अग्रसर होने पर हमें प्रथम सन्निकटन

$$H^{*(2)}(X, F_0) \text{ का } H_1^{*(2)}(X, F_0)$$

के लिये परिणाम

$$H_1^{*(2)}(X, F_0) = X(1-X)[P_9 - (P_9 + P_{11} - P_{10}F_0)e^{-P_1 F_0} + P_{11}e^{-2P_1 F_0}], \quad (16)$$

मिलता है जहाँ

$$P_6 = (P_5 + 2P_5^2), \quad P_7 = (1 + 4P_5),$$

$$P_8 = -2(1 + 6P_5), \quad P_9 = 5P_6/P_1$$

$$P_{10} = (10P_7 + 5P_8)P_4/2 \quad P_{11} = 2P_4^2/P_1$$

समीकरण (8) में समीकरण (14) तथा (16) से वही वही मान रखने पर हमें $H^{*(3)}(X, F_0)$ का प्रथम सन्निकटन $H_1^{*(3)}(X, F_0)$ निम्न रूप में मिलता है

$$H_1^{*(3)}(X, F_0) = X(1-X)[P_{12} - (P_{18} + P_{13}F_0 + P_{19}F_0^2)e^{-P_1F_0} - (P_{20} + P_{16}P_1F_0)e^{-2P_1F_0} + P_{17} - e^{-3P_1F_0}], F_0 > 0, \quad (17)$$

वहाँ

$$\begin{aligned} P_{12} &= 5P_9(2P_7 + P_8)/2P_1 & P_{13} &= (8P_4P_9 + 5(P_9 + P_{11})(2P_7 + P_8))/2, \\ P_{14} &= 5P_{10}(2P_7 + P_8)/2, & P_{15} &= (5P_{11}(2P_7 + P_8) + 8P_4(P_9 + P_{11}))/2P_{11}, \\ P_{16} &= 4P_4P_{10}/P_1^2, & P_{17} &= 2P_4P_{11}/P_1, \\ P_{18} &= (P_{12} + P_{16} + P_{17} - P_{15}), & P_{19} &= -P_{14}/2, \\ P_{20} &= P_{15} + P_{16}. \end{aligned}$$

समीकरण (14), (16) तथा (17) के अनुसार विमाहीन गहराई का व्यंजक निम्नलिखित होगा :

$$H(X, F_0) \simeq H_2 + \alpha H_1^{*(1)}(X, F_0) + \alpha^2 H_1^{*(2)}(X, F_0) + \alpha^3 H_1^{*(3)}(X, F_0), F_0 > 0. \quad (18)$$

समीकरण (18) के अनुसार बहिर्वाह दर^[3]

$$Q \simeq \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial F_0} dX,$$

का स्वरूप निम्नवत् हो जाता है ।

$$\begin{aligned} Q \simeq \alpha/6 & [[P_{11}\{-P_4 + \alpha(P_9 + P_{11} - P_{10}F_0) + \alpha^2(P_{18} + P_{13}F_0 + P_{19}F_0^2)\} \\ & + \alpha P_{10} - \alpha^2(P_{18} + 2P_{19}F_0)]e^{-P_1F_0} \\ & + \alpha[\alpha\{2P_1(P_{20} + P_1P_{16}F_0) - P_1P_{16}\} - 2P_1P_{11}]e^{-2P_1F_0} - 3P_1P_{17}\alpha^2e^{-3P_1F_0}] \quad (19) \end{aligned}$$

अब हम विमाहीन प्राचल α तथा H_1, H_2 को सांख्यिक मान प्रदान करके निर्मेय का अध्ययन लेखाचित्र के रूप में करेंगे ।

उदाहरण

दिये हुये सिद्धान्त के सम्प्रयोग हेतु $\alpha=0.5$, $H_1=0.75$ तथा $H_2=1.5$ के मानों पर विचार किया है और इनसे संगत मानों के विमाहीन जल की गहराई तथा बहिर्वाह दर प्राप्त किये गये हैं जिन्हें चित्र 1 तथा 2 में दिया गया है ।

इन लेखाचित्रों पर परिणामों की तुलना पाव लोत्स्की हल से की जा सकती है ।

अचल प्रवाह के लिये मुक्त पृष्ठ का अविमीय चरों से युक्त समीकरण पावलोव्स्की के निम्न-लिखित समीकरण^[10] द्वारा व्यक्त किया जा सकता है

$$H = H_1 - \alpha/2(X-1)H_0 \ln \left(\frac{H_1 - H_0}{H - H_0} \right), \quad (20)$$

जहाँ H_0 चर है जिसे सामान्य गहराई कहते हैं और (20) से $X=0$ के लिये $H=H_2$ का व्यवहार करते हुये परिभाषित किया जाता है अर्थात्

$$H_2 - H_1 - \alpha/2 = H_0 \ln \left(\frac{H_1 - H_0}{H_2 - H_0} \right), \quad (21)$$

मुक्त पृष्ठ के बिन्दुओं को (20) तथा (21) से प्राप्त किया गया है जिन्हें चित्र 1 में प्रदर्शित किया गया है। स्पष्ट है कि समय $F_0=0.28$ के पश्चात् प्रवाह स्थिर हो जाता है और पावलोव्स्की हल तथा लेखकों द्वारा विकसित प्रविधि के मध्य सन्तोषजनक साम्य पाया जाता है।

निष्कर्ष

क्षोभ सिद्धान्त में, विशेषतया अरैखिक आंशिक अवकल समीकरणों वाले निर्मेयों में रिट्ज की विधि का व्यापक प्रयोग होता है। प्रस्तुत प्रपत्र में क्षोभ प्रविधि, लाप्लास रूपान्तर तथा रिट्ज विधि का उपयोग करते हुये अप्रवेश्य ढालू चट्टान पर भूमिजल प्रवाह के लिये जल की गहराई तथा वहिर्वाह दर के लिये व्यंजक प्राप्त किये गये हैं। सांख्यिक परिणाम ICL 19045 कम्प्यूटर पर प्राप्त किये गये हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से एक (वी० एस० पाण्डेय) को सी० एस० आर० नई दिल्ली को आर्थिक सहायता प्राप्त होने के लिये आभार व्यक्त किया जाता है।

निर्देश

1. ब्राच जे० सी०, J. Hydraul. Div. Amer. Soc. Civil Eng. 1973, 99 (HY3), 395-403.
2. फेंग, सी० एस०, वैंग एस० एन० तथा हैरिसन, डब्लू०, Water Resour. Res. 1972 8 (1), 121-128.
3. फ्रैगकिस, सी० एन० तथा जिमोपूलोस, सी०, Water Resour. Res. 1979, 15 (1), 176-180.
4. हैरिसन, डब्लू, फेंग, सी० एस० तथा वैंग, एस० एन०, Water Resour. Res. 7 (5), 1981 1313-1322.
5. हार, एम० ई०, Ground Water and Seepage, मकग्राहिल न्यूयार्क, लन्दन 1962.

6. हार्नबर्गर, सी० एम०, एवर्ट, जे० तथा रेम्सन, आई०, Water Resour. Res. 1970, 6 (2) 601-608.
7. कैंटोरोविच, एल० वी० तथा क्रायलोव, वी० आई०, Approximate Method of Higer Analysis, ग्रामिजन, नीडरलैंड, 1958.
8. न्यूमैन, एस० पी० तथा विदरस्पून, पी० ए०, J. Eng. Mech. Div. Amer. Soc. Civil Eng. 97 (EM 2), 359-374.
9. पिडर, जी० एफ० तथा फ्रिड, ई० ओ०, Water Resour. Res. 1972, 8 (1), 108-120.
10. पोलुवारिनोवा-मौचिना, पी० वाई०, Theory of Groundwater Moment, प्रिंसटन युनिवर्सिटी प्रेस, प्रिंसटन, न्यूजर्सी, 1962.
11. टर्जीडिस जी०, J. Irrig. Drain. Div. Amer. Soc., Civil Eng. 1968, 94 (IR 4), 381-389.
12. जिमोपूलोस, सी०, J. Hydrol., 1976 30, 1-18.
13. जिमोपूलोस, सी० तथा टर्जीडिस, जी०, J. Hydrol., 1975 27, 73-93.

हाइड्रस फेरिक आक्साइड में कतिपय धनायनिक धातु ऐम्मीनों के विनिमय की गतिकी

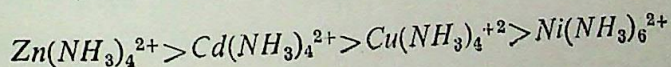
ब्रज भूषण

रसायन विभाग, महर्षि दयानन्द यूनिवर्सिटी, रोहतक

[प्राप्त—सितम्बर 16, 1982]

सारांश

हाइड्रस फेरिक आक्साइड में Cu^{+2} , Ni^{+2} , Zn^{+2} तथा Cd^{+2} के ऐम्मीन संकरों के विनियम की गति का अध्ययन किया गया और उस पर (i) विनिमायक आयनों की वाह्य सान्द्रता (ii) विनिमायक कणों के आकार तथा (iii) धातु-ऐम्मीन संकर आयनों के त्रिविम-रासायनिक गुणधर्म का प्रभाव देखा गया। यह देखा गया कि यदि विनिमायक कणों का औसत आकार एक-सा रहे तो आंशिक साम्यावस्था F विनिमायक आयन की वाह्य सान्द्रता के साथ-साथ तब तक बढ़ती जाती है जब तक कि वह सान्द्रता से स्वतंत्र नहीं हो जाती। किसी एक निश्चित सान्द्रता के लिए F में वृद्धि होती जाती है यदि विनिमायक कणों का औसत आकार घटता है। यह मानते हुए कि F विनिमायक आयनों के त्रिविम गुणधर्मों पर आश्रित है, F का जो ह्रासमान क्रम देखा जाता है वह इस प्रकार है :

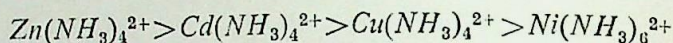


Abstract

Kinetics of exchange of certain cationic metal-ammines in hydrous ferric oxide.
By Brij Bhushan, Department of Chemistry, Maharshi Dayanand University, Rohtak.

Kinetics of exchange of ammine complexes of Cu^{+2} , Ni^{+2} , Zn^{+2} and Cd^{+2} ions in hydrous ferric oxide has been studied as dependent on (i) external concentration of the exchanging ions; (ii) size of the exchanger particle and (iii) stereo-chemical property of the metal ammine complex ions. It has been found that the average size of the exchanger particles remaining the same, the fractional attainment of equilibrium, ' F ' increases with the external concentration of the exchanging ion

until it becomes independent of concentration. For any specified concentration, 'F' increases as the average size of the exchanger particles decreases. Lastly, considering the dependence of 'F' on steric properties of the exchanging ions, the observed pattern in decreasing order of 'F' is :



कार तथा भूषण^[1] ने यह प्रदर्शित किया है कि कतिपय द्विसंयोजी धातु ऐम्मीन संकर आयनों के प्रति विनिमायक पदार्थ की वरीयता इन आयनों के आकार / आयनी विश्व के साथ सम्बन्धित की जा सकती है। यह देखने के लिये कि विनिमयशील आयनों के त्रिविमीय अभिलक्षणों से दर प्रक्रम कहाँ तक प्रभावित होता है तथा यह स्पष्ट करने के कि लिये समग्र विनिमय पर विनिमयशील आयनों तथा विनिमायक पदार्थों की क्या भूमिका है विनिमय अभिक्रियाओं की गतिकी का अध्ययन किया गया।

विनिमय अभिक्रिया की दर का अध्ययन निम्नलिखित के अधीन मानकर किया गया—

- (1) विनिमयशील आयन की वाह्य सान्द्रता
- (2) विनिमायक कणों का आकार
- (3) धातुऐम्मीन संकर विविध रासायनिक गुण धर्म

प्रयोगात्मक

सामग्री तथा विधियाँ : प्रयुक्त समस्त रसायन वैश्लेषिक कोटि के थे। सारे प्रयोग में दुबारा आसुत जल का प्रयोग किया गया।

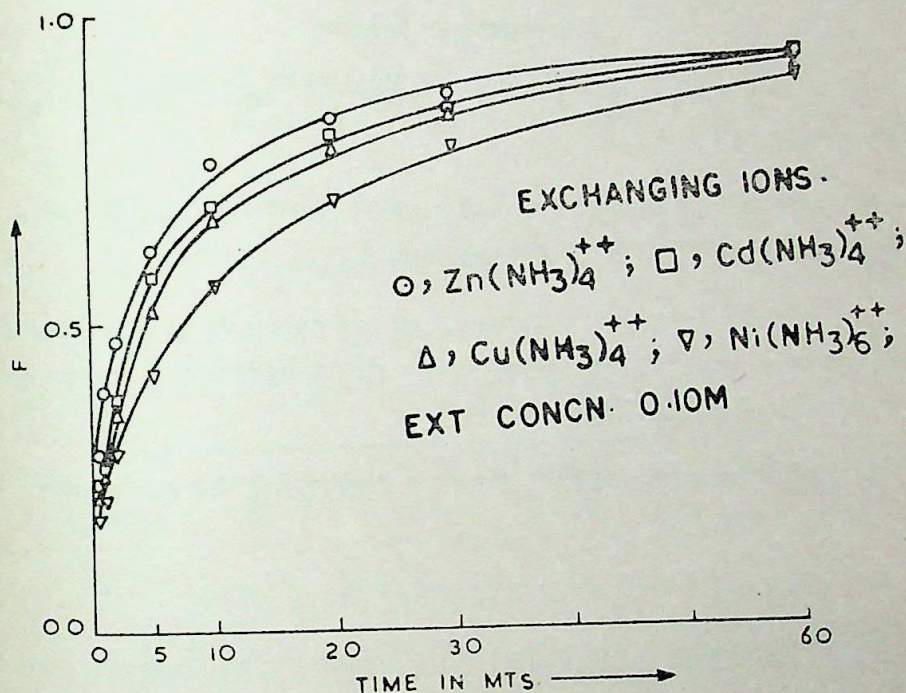
हाइड्रस फेरिक आक्साइड की तैयारी : इस पदार्थ को बोगल की विधि^[2] से तैयार किया गया तथा धुले अवक्षेप को $55 \pm 5^\circ\text{C}$ पर सुखाया गया। इस नमूने के जलीय निलम्बन को जब पी-एच मीटर की विधि से अनुमापित किया गया^[3] तो व्युत्क्रम आयन-विनिमय पैटर्न देखा गया।

विनिमायक पदार्थों के औसत कण व्यास का निर्धारण : हाइड्रस फेरिक आक्साइड का निर्दिष्ट औसत आकार प्राप्त करने के लिए उसे पीसा गया और फिर मानक चलनियों से छाना गया। कणों को गोलाकार मानते हुए नमूना के कणों का व्यास प्रोफाइल प्रोजेक्टर निकन 6C माडेल (जापान) द्वारा मापा गया।

धातु संकरों की तैयारी : धातुओं के ऐम्मीन संकर तैयार करने के लिए जल विलेय धातु लवणों की उपयुक्त मात्राएँ जलीय अमोनिया में, जिसमें अमोनियम क्लोराइड था ($[\text{वफर}] : [\text{धातु}] = 10$), घोली गई। पी-एच मापन एलिको पी-एच मापी के द्वारा बेकमान के काँच इलेक्ट्रोडों के समन्वयन में किया गया। अभिक्रिया मिश्रणों में पी-एच समंजन के लिये या तो (1 : 4) अमोनिया या (1 : 4) सल्फ्यूरिक अम्ल का प्रयोग किया गया।

विधि : ज्ञात सान्द्रता वाले संग्रह विलयन में से 25 मिली० विलयन पिपेट से निकाल कर शंक्वाकार पलिघ में डाला गया जिसमें 250 मिग्रा० विनिमायक पदार्थ था। फिर पलिघ को निश्चित अवधि

तक हिलाया गया, विलयन का अपकेन्द्रण किया गया और छनित विलयन की उपयुक्त मात्रा के अनु-मापन से वाह्य विलयन में विनिमयशील आयन की मात्रा ज्ञात की गई। इस प्रकार प्रारम्भिक सान्द्रता तथा इस सान्द्रता से विनिमायक पदार्थ द्वारा ग्रहीत आयनों की मात्रा ज्ञात कर ली गई।



PLOTS OF F Vs. t IN HYDROUS FERRIC OXIDE (PARTICLE RADIUS 1.625×10^{-3} CMS)

इसी तरह के अनेक निर्धारण विभिन्न अवधियों के लिए सम्पन्न किये गये जब तक कि साम्यावस्था प्राप्त नहीं हो गई।

किसी अवधि t पर साम्यावस्था की आंशिक उपलब्धि F को निम्न प्रकार परिगणित किया गया :

$$F = \frac{\text{अवधि } t \text{ पर अधिशोषित घातु आयन की मात्रा}}{\text{साम्यावस्था पर अधिशोषित घातु आयन की कुल मात्रा}}$$

प्रयोग से प्राप्त F मानों के संगत Bt मान राइचैनबर्ग सारणी^[4] से ज्ञात किये गये।

t (सेकंड), r (विनिमायक कण की त्रिज्या सेमी० में), तथा Bt के ज्ञात मानों से विसरण गुणांक D_i (सेमी० तक) के मान निम्नलिखित सम्बन्ध की सहायता से ज्ञात किये गये।

$$Di = \frac{Bt}{t} \times \frac{r^2}{\pi^2}$$

ताप : समस्त प्रयोग $25 \pm 5^\circ\text{C}$ पर सम्पन्न हुए ।

परिणाम तथा विवेचना

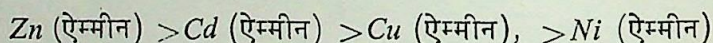
प्राप्त परिणाम सारणी 1 तथा 2 में दिये गये हैं और उनसे लेखाचित्र अंकित किये गये हैं । इनसे निम्नलिखित तथ्य प्राप्त होते हैं ।

(अ) समग्र विनिमय दो स्पष्ट प्रावस्थाओं में घटित होता है—प्रारम्भिक अवस्था में यह तीव्र रहता है और साम्यावस्था प्राप्त होने तक मन्द होता जाता है ।

(आ) यदि विनिमायक कणों का औसत आकार एक सा बना रहे तो साम्यावस्था की आंशिक लब्धि F विनिमयशील आयन की वाह्य सान्द्रता के साथ तब तक बढ़ती जाती है जब तक यह सान्द्रता से स्वतन्त्र नहीं हो जाती ($\geq 0.05 M$) ।

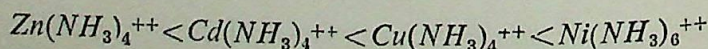
(इ) किसी निर्दिष्ट वाह्य सान्द्रता पर F तब तक बढ़ती जाती है जब तक विनिमायक कणों का औसत आकार घटता जाता है ।

(ई) विभिन्न ऐम्मीन संकरों की दर उनके ह्रासमान क्रम के अनुसार

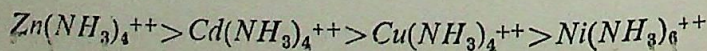


जब हम विनिमय दर की आश्रिताओं (अ-इ) पर प्रचलित विचारधाराओं^[4-9] के अनुसार दृष्टिपात करते हैं तो प्रतीत होता है कि विनिमय दर विसरण क्रियाविधि द्वारा नियन्त्रित होती है । प्रारम्भिक अवस्था जो कि तीव्र प्रक्रम है, फिल्म विसरण प्रक्रम द्वारा और बाद की अवस्था का मन्द प्रक्रम कण विसरण क्रियाविधि द्वारा नियन्त्रित होता है । इनके लिए विसरण गुणांक (Di) के मान प्राप्त करने के लिए Bt के विपक्ष t के आलेख खींचे गये (चित्र 1) । रैखिक आचरण से कुछ-कुछ विचलन पाया गया ।

विभिन्न संकर ऐम्मीनों की विसरण नियन्त्रित विनिमय दरों (ई) की व्याख्या संकरों के बढ़ते हुए आयनी विभव $\left(\phi = \frac{\text{आयनी आवेश}}{\text{आयनी त्रिज्या}} \right)$ के प्रकाश में प्रस्तुत की जा सकती है । यह जानते हुये कि चुने गए सभी संकर आयन द्विधनात्मक हैं और यह स्मरण रखते हुये कि विनिमय अन्योन्य क्रिया के अन्तर्गत त्रिविम संमिति बनी रहती है, विनिमयशील आयनों के आकार-प्रकार की महत्ता स्पष्ट हो जाती है । लेखक ने^[1] अन्यत्र यह प्रदर्शित किया है कि आयनी आकार का अनुमित क्रम इस प्रकार होगा



फलतः ϕ के मान इसके उल्टे क्रम में होंगे अर्थात्



विनिमय दर तथा विसरण गुणांकों के ऐसे ही प्राप्त होने की आशा की जाती है। प्रेक्षित F तथा D_i मान इस क्रम से मेल खाते हैं।

सारणी 1

विनिमय की दर की विनिमायक आयनों की वाह्य सान्द्रता तथा
विनिमायक कण के आकार पर निर्भरता

कुल आयतन = 25 मिली

विनिमायक आयन = $Zn(NH_3)_4^{++}$

$pH=8.5$

समय मिनटों में	साम्य की आंशिक प्राप्ति (F)				
	.001M	(r) कण त्रिज्या = 16.25×10^{-4} सेमी० 0.02 M	0.05 M	0.10 M	$r=8.15 \times 10^{-4}$ सेमी० 0.10 M
0.5	0.15	0.22	0.25	0.29	0.31
1	0.20	0.28	0.36	0.39	0.51
2	0.30	0.38	0.45	0.47	0.58
5	0.35	0.52	0.60	0.62	0.72
10	0.46	0.66	0.75	0.76	0.82
20	0.52	0.75	0.83	0.83	0.94
30	0.63	0.78	0.86	0.87	0.98
60	0.74	0.80	0.94	0.94	1.00
120	0.86	0.96	1.00	1.00	1.00
180	0.99	1.00	1.00	1.00	—
240	1.00	1.00	1.00	1.00	—

सारणी 2

विनिमय की दर की विनिमायक आयनों की विविध
लक्षणों पर निर्भरता

विनिमायक आयन की सान्द्रता = 0.10 M

$pH=8.5$

कुल आयन = 25 मिली

कण विज्ञा = 16.25×10^{-4} सेमी०

समय	समय की आंशिक प्राप्ति 'F'			
	$Zn(NH_3)_4^{++}$	$Cd(NH_3)_4^{++}$	$Cu(NH_3)_4^{++}$	$Ni(NH_3)_6^{++}$
30 सेकंड	0.29	0.24	0.22	0.18
1 मिनट	0.39	0.27	0.25	0.22
2 „	0.47	0.38	0.36	0.29
5 „	0.62	0.58	0.51	0.42
10 „	0.76	0.68	0.67	0.56
20 „	0.83	0.80	0.78	0.70
30 „	0.87	0.85	0.81	0.79
60 „	0.94	0.93	0.90	0.90
120 „	1.00	0.99	0.98	0.97
180 „	1.00	1.00	1.00	1.00
$Di \times 10^9$ सेमी०/ सेकण्ड	0.115	0.112	0.086	0.064

निर्देश

1. भूषण, वी० तथा कार, के० आर, Z. Naturforsch. 1975, 30b, 103.
2. वोगेल, ए० आई०, "Quantitative Inorganic Analysis", लांगमैन लन्दन, 1969, पृष्ठ 470.

3. "Ion-Exchange (a special study)", नफील्ड एडवान्स साइंस, 1970, पृष्ठ 13-14.
4. राइकेनवर्ग, डी०, J. Am. Chem. Soc., 1953, 75, 589.
5. नानकोल्लस, जी० एच० तथा पैटर्सन, आर०, J. Inorg. Nucl. Chem, 1961, 22, 259.
6. ऐम्प्लेट, सी० बी०, मकडोनल्ड, एल० ए० तथा रेडमेन, एम० जे०. J. Inorg. Nucl. Chem. 1958, 6, 236.
7. वही, वही, 1958, 6, 220,
8. हेलफ्रिच, एफ० तथा प्लेसेट, एम० एस०, J. Chem. Phys., 1958, 28, 418.
9. बाँयड, जी० ई०, एडम्सन, ए० डब्लू० तथा मायर्स, एल० एस०, J. Am. Chem.. Soc., 1947, 69, 2836.
10. सिंह, एस०, पी-एच० डी० थोसीस, दिल्ली यूनिवर्सिटी, 1971.
11. जोगेंसन, सी० के०, "Inorganic Complexes", एकेडमिक प्रेस, लन्दन, 1966, पृष्ठ 54.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Vol. 26, No. 4, 1983

चर प्रचूषणमय सपाट पट्टिका के ऊपर अस्थायी श्यान असंपीड्य तरल का प्रवाह

नवल किशोर तथा आर० ए० तिवारी
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी-5

[प्राप्त—अक्टूबर 21, 1981]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में अस्थायी, श्यान, असंपीड्य द्रव का प्रवाह चर चूषण वाली सपाट पट्टिका के ऊपर से होकर वर्णित है जहाँ चूषण वेग समय के साथ घातांकी रूप से बदलता है। वेग तथा उपरिस्तर घर्षण के लिए परिसीमा स्तर में लाप्लास रूपान्तर प्रविधि का प्रयोग करते हुये व्यंजक प्राप्त किये गये हैं। वेग परिच्छेदिका का आलेखचित्र खींचा गया है।

Abstract

Flow of unsteady viscous incompressible fluid over a flat plate with variable suction. By Newal Kishore and R. A. Tiwari, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi-5.

The present paper deals with the flow of unsteady viscous, incompressible fluid over a flat plate with variable suction, when the suction velocity varies exponentially with time. Expressions for the velocity and skin friction in the the boundary layer have been obtained by Laplace transform technique in a non-dimensional form. The velocity profile has been plotted graphically. This is followed by a comparative discussion of the effect of suction parameter on the velocity and skin friction. It is interesting to note that the boundary layer contracts with the increase in suction velocity and there is no backflow near the wall.

1. प्रस्तावना

पुरोहित तथा गोयल^[1] ने चूषणमय सपाट पट्टिका से होकर अस्थायी प्रवाह का अध्ययन किया है। स्टुअर्ट^[4] ने समान चूषण वाली अनन्त सपाट पट्टिका के ऊपर दोलायमान प्रवाह की कुछ विशेषताओं

का अध्ययन किया है। पाण्डेय^[2,3] ने समान तथा चर चूषणों वाली अनन्त सपाट पट्टिका से होकर पटलीय परिसीमा स्तर घातीय प्रवाह का अध्ययन किया है।

हमने वेग परिच्छेदिका तथा उपरिस्तर घर्षण के लिये व्यंजक प्राप्त किये हैं। वेग परिच्छेदिका के लिए लेखाचित्र खींचा गया है। हमने अपने परिणामों की तुलना पुरोहित तथा गोयल^[3], स्टुअर्ट^[4] तथा पाण्डेय^[3] के परिणामों से की है।

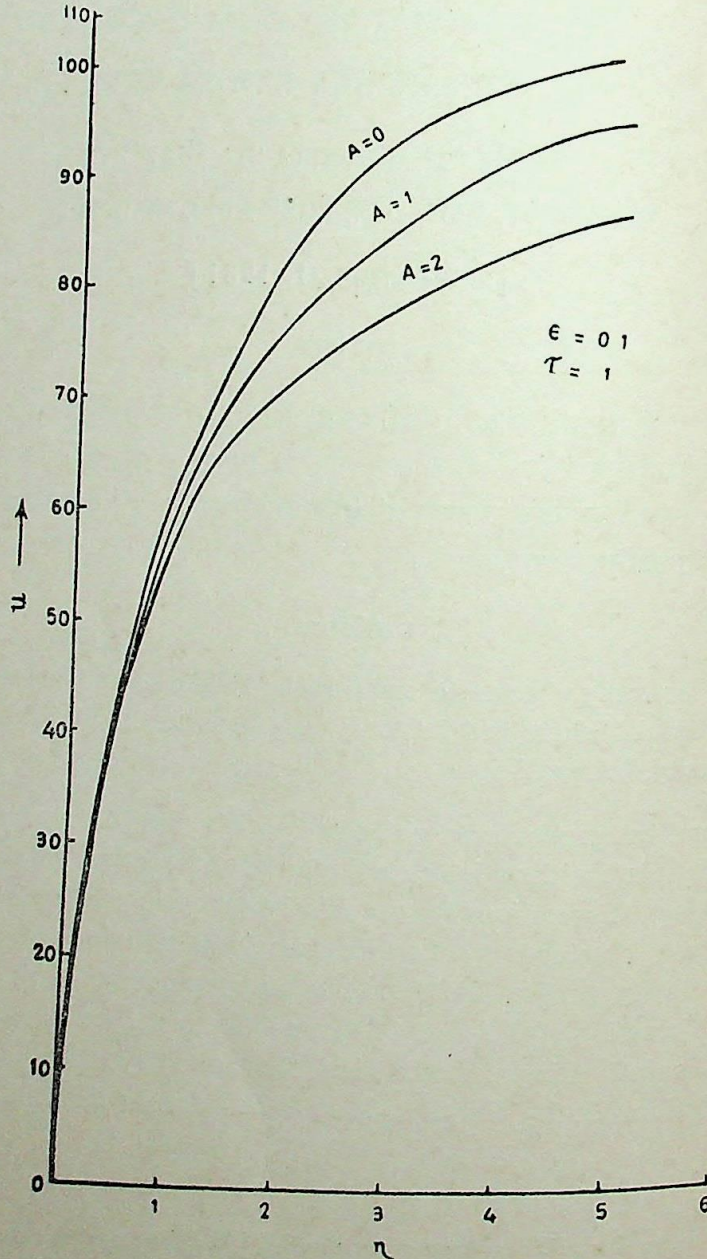


FIG 1 VELOCITY u AGAINST η

2. निर्मेय का सूत्रीकरण

माना कि चर चूषण वेग का रूप

$$v' = v_1(1 + \epsilon AC\omega_1 t) \geq 0 \text{ के लिये} \quad (2.1)$$

है जहाँ v_1 एक ऋणात्मक अचर है, A वास्तविक धनात्मक अचर है तथा ϵ एक लघु मात्रा है जिससे कि $\epsilon A \leq 1$.

गति तथा सातत्य के सम्बन्धित समीकरण निम्न होंगे

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} = v \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

x, y निर्देशांक क्रमशः पट्टिका के समान्तर तथा लम्ब दिशा में मापे जाते हैं। यदि हम मान लें कि समस्त भौतिक संख्याएँ x से स्वतन्त्र हैं तो समीकरण (2.2) तथा (2.3) निम्नवत् हो जाते हैं

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} = v \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

समीकरण (2.4) में समीकरण (2.1) से v' का मान रखने पर

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + v_1(1 + \epsilon A e^{\omega_1 t}) \frac{\partial u'}{\partial y} = v \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \quad (2.6)$$

परिसीमा प्रतिबन्ध इस प्रकार है

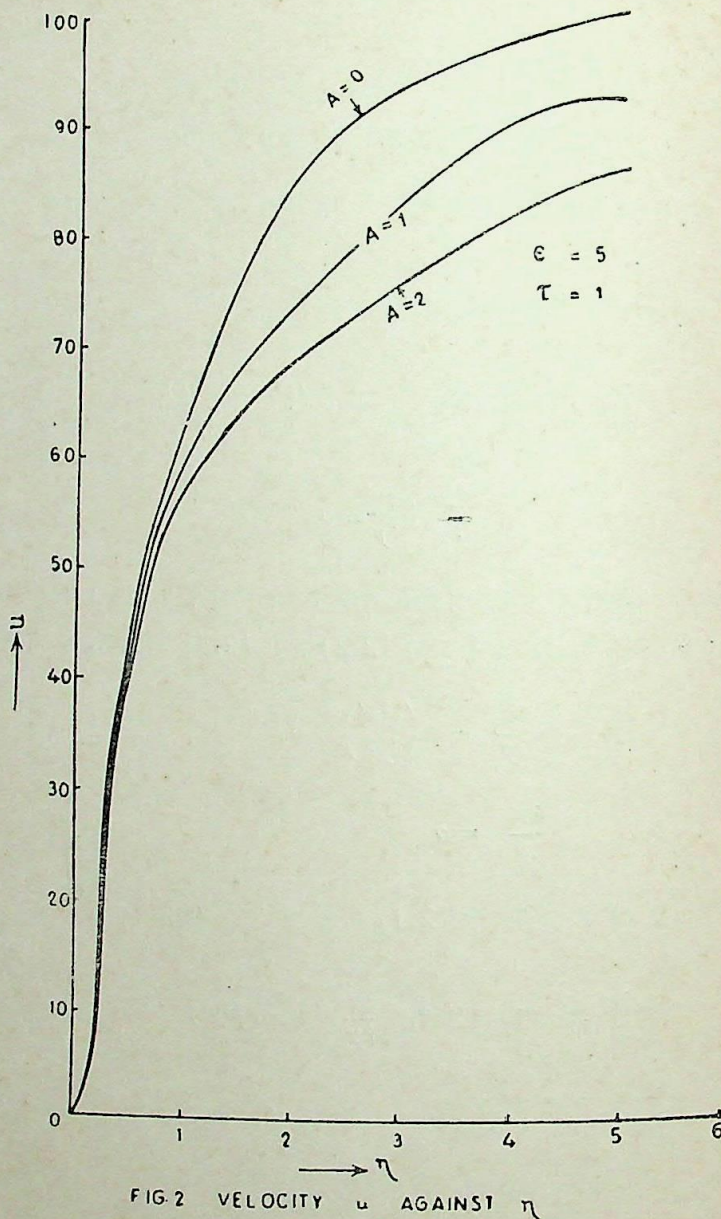
$$u'(0, t) = 0 \text{ तथा } u(\infty, t) = U_\infty \quad (2.7)$$

तथा प्रारम्भिक अवस्था है

$$u'(y, 0) = U_\infty [1 - \exp(v_1 y / v)] \quad (2.8)$$

अ-दिशीय मात्राओं का समावेश

$$\eta = \frac{|v_1|y}{v}, \quad \tau = \frac{|v_1|^2 t}{v}, \quad \omega = \frac{v\omega_1}{v_1^2}, \quad u = \frac{u'}{U_\infty},$$



के रूप में करने पर समीकरण (2.5) तथा (2.8) का समरूप

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (1 + \epsilon A C \omega \tau) \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (2.9)$$

तथा

$$u(\eta, 0) = 1 - e^{-\eta} \quad (2.10)$$

हो जाता है जो परिसीमा प्रतिबन्धों

$$u(0, \tau) = 0; u(\infty, \tau) = 1$$

के आश्रित होता है।

3. निर्मेय का हल

समीकरण (2.9) रैखिक आंशिक अवकल समीकरण है जिसके गुणांक अचर हैं। हम इसका हल लाप्लास रूपान्तर विधि से प्राप्त करेंगे।

$u(\eta, \tau)$ के लाप्लास रूपान्तर को

$$u_s = \int_0^\infty nc^{-s\tau} d\tau$$

के रूप में परिभाषित किया जाता है और समीकरण (2.9) को

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u_s}{\partial \eta} + \epsilon A \frac{\partial u_{(s-\omega)}}{\partial \eta} - s u_s = e^{-\eta} - 1 \quad (3.1)$$

के रूप में रूपान्तरित किया जाता है।

यदि u_s आवर्त ω के साथ आवर्ती हो तो हम

$$u_{(s-\omega)} = u_s$$

लिख सकते हैं और समीकरण (3.1) सरल होकर

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial \eta^2} + (1 + \epsilon A) \frac{\partial u_s}{\partial \eta} - s u_s = e^{-\eta} - 1 \quad (3.2)$$

बन जाता है जो स्थिर गुणांक वाले एक रैखिक अवकल समीकरण है अतः इसका हल निम्न प्रकार हो जाता है

$$u_s = c_1 \exp \left[-\left(\frac{1+\epsilon A}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{(1+\epsilon A)^2}{4} + s \right)} \right] \eta + c_2 \exp \left[-\left(\frac{1+\epsilon A}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{(1+\epsilon A)^2}{4} + s \right)} \right] \eta + 1/s + \frac{e^{-\eta}}{-(s+\epsilon A)} \quad (3.3)$$

सम्बन्धित परिसीमा प्रतिबन्ध निम्नवत् है

(1)

$$u_s = 0, \eta = 0$$

तथा

(2)

$$(u_s = 1/s, \eta = \infty)$$

(3.4)

समाकलन के स्थिरांक का मान परिसीमा प्रतिबन्धों (3.4) की सहायता से निकालने पर

$$u_s = 1/s - \frac{e^{-\eta}}{s + \epsilon A} - 1/s e^{-\eta/2} (1 + \epsilon A) e^{-\eta} \sqrt{\left(\frac{(1 + \epsilon A)^2}{4}\right)} + s \\ + \frac{1}{s + \epsilon A} e^{-\eta/2 (1 + \epsilon A)} e^{-\eta} \sqrt{\left(\frac{(1 + \epsilon A)^2}{4}\right)} + s \quad (3.5)$$

समीकरण (3.5) का लाप्लास व्युत्क्रम रूपान्तर

$$u = e^{-\eta} e^{-(\epsilon A)\tau} - 1/2 e^{-(1 + \epsilon A)/2 \eta} \cdot \left[e^{\eta} \frac{(1 + \epsilon A)}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} + \frac{(1 + \epsilon A)}{2} \sqrt{\tau} \right) + e^{-\eta} \left(\frac{1 + \epsilon A}{2} \right) \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} - \frac{(1 + \epsilon A)}{2} \right) \right] + 1/2 e^{-\eta(1 + \epsilon A)/2} \cdot e^{-(\epsilon A)\tau} \cdot \left[e^{\eta} \frac{(1 - \epsilon A)}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} + \frac{(1 - \epsilon A)}{2} \sqrt{\tau} \right) + e^{-\eta} \frac{(1 - \epsilon A)}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} - \frac{(1 - \epsilon A)}{2} \sqrt{\tau} \right) \right] \quad (3.6)$$

$\epsilon A = -1$ के लिए समीकरण (3.5) निम्न प्रकार हो जाता है

$$u_s = 1/s - \frac{e^{-\eta}}{s - 1} - 1/s e^{-\eta} \sqrt{s} + \frac{1}{s - 1} \cdot e^{-\eta} \sqrt{s} \quad (3.7)$$

तथा इसका व्युत्क्रम रूपान्तर इस प्रकार है

$$u = 1 - e^{-(\eta - \tau)} - \frac{1}{\sqrt{\tau}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} \right) + 1/2 e^{\tau} [e^{\eta} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) + e^{-\eta} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right)] \quad (3.8)$$

भित्ति के उपरिस्तर घर्षण को (3.9) द्वारा व्यक्त किया जाता है

$$\tau_o = \mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)_{y=0} \\ = \mu |v_1| U_{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_o \quad (3.9)$$

समीकरण (3.8) तथा (3.9) से हमें प्राप्त होता है कि

$$\tau_0 = \rho |v_1| U_\infty (e^\tau + \frac{1}{2} \psi(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \tau)) \quad (3.10)$$

जहाँ

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = 1/2 e^{-x^2} \psi(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2)$$

तथा

$$d/dx(a, c, x) = -\frac{\sqrt{(a+1)}}{\sqrt{a}} \psi(a+1, \tau+1; x)$$

स्थिर प्रचूषण $\epsilon=0$ के लिये समीकरण (3.5) रूप

$$u_s = 1/s - \frac{e^{-\eta}}{s}$$

में समानीत हो जाता है ज्यों पुरोहित तथा गोयल^[1] द्वारा प्राप्त परिणाम है।

4. निष्कर्ष

चित्र 1 तथा 2 वेग परिच्छेदिकाओं के सही सही मानों का आलेख प्रदर्शित करते हैं जो भित्ति से अ-विमीय दूरी के विरुद्ध क्रमशः $\epsilon=0.1$ तथा 0.5 के लिये खींचे गये हैं जब $\tau=1$ तथा $A=0$, 1 चित्रों के प्रत्यक्ष है कि ϵ के दोनों मानों के लिये A में वृद्धि के साथ साथ μ घटता जाता है। यह पाण्डेय^[5] द्वारा प्राप्त परिणाम से मेल नहीं खाता। चित्र से यह भी स्पष्ट है कि भित्ति के निकट पश्च प्रवाह नहीं होता है। $\epsilon=0$ के लिए वेग परिच्छेदिका का हमारा व्यंजक पुरोहित के^[1] स्थिर चूषण प्रवाह के व्यंजक में समानीत हो जाता है। भित्ति के निकट पश्च प्रवाह न होना स्टुबर्ट^[4] परिणामों के अनुरूप है।

5. सम्प्रयोग

शायद ही कोई ऐसी तरल प्रवाह समस्या हो जिसमें परिसीमा स्तर संकल्पना अतः उपरिस्तर चूषण का समावेश न होता हो। अनेक परिसीमाओं के सक्षम परिकल्पन में हमारा मूल उद्देश्य पृथक्करण की प्रवृत्ति को घटाना और इस तरह से प्रतिरोध को पर्याप्त रूप से घटाना होना चाहिये। पृथक्करण से बचने की प्रभावशाली विधि है परिसीमा स्तर नियन्त्रण। इसे भित्ति के निकट रुके द्रव को चूषण द्वारा हटा कर सम्पन्न किया जा सकता है। यदि स्थिर चूषण को अपेक्षा चर चूषण हो तो परिसीमा स्तर में मन्द गति से चलने वाला तरल अधिक अच्छी तरह हटाया जा सकता है।

निर्देश

1. पुरोहित, जी० एन० तथा गोयल, एम० बी०, Proc. Indian Acad. Sci. 1975, 81 A, 215-219.

2. पाण्डेय, के० एस०, Indian J. of Physical 1968, **12** (4), 213-222.
3. वही, Journal of Math. Soc. 1971, **35**, 87-98.
4. स्टुअर्ट, जे० टी०, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1955, **231**, 116.
5. मेसिहा, एस० ए० एस०, Proc. Camb. Phil. Soc., 166, **62**, 329.
6. स्पेन, बी०, Ordinary Differential Equation. पृष्ठ 90, प्रमेय 70.
7. बेटमैन मैनुस्क्रिप्ट, Table of Integral Transform, भाग I, मैकग्राहिल बुक कम्पनी न्यूयार्क, 1954.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 26, No. 4, 1983

फलनों के सन्निकटोकरण में त्रुटि सीमाएं

के० कुरेशी

शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, नरसिंहपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—जून 13, 1981]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे—

प्रमेय :

यदि $f(x)$ एक आवर्ती फलन हो और $0 < \alpha \leq 1$ के लिए वर्ग $\text{Lip}(\alpha, p)$ से सम्बन्धित हो तथा यदि अनुक्रम $\{p_n\}$ (1.5) की तरह परिभाषित हो तथा यदि

$$\left(\int_1^n \frac{P(y)^q}{y^{q\alpha + \delta q + 2 - q}} dy \right)^{1/q} = O \left(\frac{P(n)}{n^{\alpha + 1/q + \delta - 1}} \right)$$

तो

$$\| \tilde{t}_n - \tilde{f}_n \|_p = O \left(\frac{1}{n^{\alpha - 1/p}} \right)$$

Abstract

Error bounds in the approximation of functions. By K. Qureshi, Government P. G. College, Narsinghpur (M. P.).

In the present paper we prove the theorem :

Theorem : If $f(x)$ is a periodic function and belongs to the class $\text{Lip}(\alpha, p)$ for $0 < \alpha \leq 1$ and if the sequence $\{p_n\}$ is defined as in (1.5) and if

$$\left(\int_1^n \frac{P(y)^q}{y^{q\alpha + \delta q + 2 - q}} dy \right)^{1/q} = O \left(\frac{P(n)}{n^{\alpha + 1/q + \delta - 1}} \right)$$

तो

$$\| \tilde{t}_n - \tilde{f}_n \|_p = O \left(\frac{1}{n^{\alpha - 1/p}} \right)$$

1. माना कि

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.1)$$

तथा

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \quad (1.2)$$

द्वारा क्रमशः 2π आवर्ती तथा लेबेस्क समाकलनीय फलन $f(x)$ की फूरियर श्रेणी तथा संयुग्मी श्रेणी को व्यक्त किया जाता है।

संयुग्मी श्रेणी का संगत योग फलन इस प्रकार है

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \cot t/2 dt \quad (1.3)$$

जो प्रायः सर्वत्र विद्यमान रहता है। ऐसी समस्त श्रेणियों या फलनों के वर्ग को $\tilde{L}$ द्वारा अंकित किया जाता है। जिस बिन्दु x के लिए $f(x)$ का सान्त निश्चित मान होता है उसे $\tilde{L}$ नियमित कहा जाता है यदि

$\psi(t) = 0(t)$ तथा $\tilde{f}(x)$ विद्यमान हो तथा सान्त हो जहाँ

$$\psi(t) = f(x+t) - f(x-t). \quad (1.4)$$

माना कि $\{p_n\}$ एक ऐसा अ-नृण तथा अ-वर्द्धमान अनुक्रम हो कि

$$P_n \equiv P(n) = p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n \rightarrow \infty \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

कल्पना किया कि

$$\tilde{t}_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_{n-k} \quad \tilde{s}_k \rightarrow s \text{ ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty,$$

तो हम कहते हैं कि अनुक्रम $\{\tilde{s}_n\}$ जो श्रेणी (1.2) के आंशिक योगफलों का अनुक्रम है s के प्रति (N, p_r) समाकलनीय है।

हम V_{norm} को निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं

$$\|f\|_p = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad p < 1,$$

तथा माना कि सन्निकटीकरण की कोटि को

$$E_n^*(f) = \min_{T_n} \|f - T_n\|_p,$$

द्वारा व्यक्त करते हैं जहाँ n कोटि का $T_n(x)$ त्रिकोणमितीय बहुपद है।

हम कहते हैं^[2] कि $f(x) \in \text{Lip}(\alpha, q)$ क्योंकि $a \leq x \leq b$

यदि
$$\left\{ \int_a^b |f(x+h) - f(x)|^q dx \right\}^{1/q} \leq A |h|^\alpha, 0 < \alpha \leq 1.$$

2. साहनी तथा राव^[4] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है :

प्रमेय A

यदि $f(x)$ आवर्ती हो और वर्ग $\text{Lip}(\alpha, p)$ $0 < \alpha \leq 1$ से सम्बद्ध हो तथा $\{p_n\}$ को (1.5) की भाँति परिभाषित किया जाय और यदि

$$\left(\int_1^n \frac{(P(y))^q}{y^{q\alpha+2-q}} dy \right)^{1/q} = O\left(\frac{P(n)}{n^{\alpha+1/q-1}} \right).$$

तो

$$\|f - N_n\|_p = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1/p}} \right)$$

हमने निम्नलिखित प्रमेय^[1] सिद्ध की है।

प्रमेय B

2π आवर्त वाले एक आवर्ती फलन f तथा f के लिए नालुण्ड माध्यों द्वारा $\text{Lip } \alpha$ वर्ग से सम्बन्धित सन्निकट की कोटि को निम्न द्वारा अंकित किया जाता है

$$|\tilde{t}_n[f(x), p_n] - \tilde{f}(x)| = O\left(\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{k^{\alpha+1}} \right)$$

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करना है।

प्रमेय C

यदि $f(x)$ एक आवर्ती फलन हो और $0 < \alpha \leq 1$ के लिए वर्ग $\text{Lip}(\alpha, p)$ से सम्बन्धित हो तथा यदि अनुक्रम $\{p_n\}$ को (1.5) की तरह परिभाषित किया जाय तथा यदि

$$\left(\int_1^n \frac{(P(y))^q}{y^{q\alpha+\delta q+2-q}} dy \right)^{1/q} = O\left(\frac{P(n)}{n^{\alpha+\delta+1/q-1}} \right),$$

तो

$$\|\tilde{t}_n - \tilde{f}\|_p = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1/p}} \right).$$

इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी ।

प्रमेयिका 1

(प्रमेयिका 5.11) मैकफोडन [2])

यदि $\{p_n\}$ अनुण तथा अ-वर्धमान हो तो $0 \leq a \leq b \leq \infty$; $0 \leq t \leq \pi$ तथा किसी n के लिए

$$\left| \sum_{k=a}^b p_k e^{i(n-k)t} \right| \leq P(1/t) \text{ किसी } a \text{ के लिए}$$

प्रमेयिका 2

(प्रमेयिका 5.40 मैकफाडेन[2])

यदि $[0, \pi]$ पर $f(x) \in \text{Lip}(a, p)$ तो $\psi(t)$ का भी सम्बन्ध $[0, \pi]$ पर $\text{Lip}(a, p)$ से होता है ।

प्रमेयिका 3

(प्रमेयिका 3 हिले तथा टमकिन^[1])

यदि $x \in E(\tilde{L}, f)$ तो

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{1/n} N_n(t) \psi(t) dt = 0(1),$$

जहाँ

$$N_n(t) = \{4\pi P_n \sin t/2\}^{-1} \{e^{-(n+1/2)it} \sum_{k=0}^n p_k e^{ikt} + e^{(n+1/2)it},$$

$$\sum_{k=0}^n p_k e^{-ikt}\}$$

तथा $E(\tilde{L}, f)$ से $(-\pi, \pi)$ अन्तराल में $(\tilde{L})$ नियमित बिन्दु प्रदर्शित होते हैं

प्रमेयिका 4

(प्रमेयिका 1, साहनी तथा गोयल^[5])

यदि अनुक्रम $\{p_n\}$ घनात्मक तथा अ-वर्धमान हो तो $\alpha > 0$ के लिए

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{k^{\alpha+1}}$$

प्रमेय की उपपत्ति

हिले तथा टर्मकिन^[1] (eq. 4, 13) का अनुसरण करते हुए हम

$x \in E(\tilde{L}, f)$ के लिए

$$\begin{aligned}\tilde{I}_n[f(x), p_v] - \tilde{f}(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\pi} \psi(t) N_n(t) dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{1/n} \psi(t) N_n(t) dt + \int_{1/n}^{\pi} \psi(t) N_n(t) dt\end{aligned}$$

लिखेंगे। अतः प्रमेयिका 3 का उपयोग करते पर

$$\tilde{I}_n[f(x), p_v] - \tilde{f}(x) = 0(1) + \int_{1/n}^{\pi} \psi(t) N_n(t) dt$$

चूंकि

$$N_n(t) = 2(4\pi P_n \sin t/2)^{-1} \sum_{k=0}^n p_k \cos[k - (n + \frac{1}{2})t],$$

अतः हमें

$$\tilde{I}_n[f(x), p_v] - \tilde{f}(x) = 0(1) + \left[\frac{1}{2\pi P_n} \int_{1/n}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} \sum_{k=0}^n p_k \cos[k - (n + \frac{1}{2})t] dt \right]$$

प्राप्त होता है। होल्डर असमिका तथा प्रमेयिका 2 के द्वारा

$$\begin{aligned}\tilde{I}_n[f(x), p_v] - \tilde{f}(x) &= O\left[\frac{1}{P(n)} \left\{ \int_{1/n}^{\pi} \left(t^{-\delta} \frac{|\psi(t)|}{t^{\alpha}} \right)^p dt \right\}^{1/p} \times \right. \\ &\quad \left. \left\{ \int_{1/n}^{\pi} \left[\sum_{k=0}^n \frac{p_k \cos[k - (n + \frac{1}{2})t]^q}{t^{-\delta-\alpha+1}} dt \right]^{1/q} \right\} \right] \\ &= O\left[\frac{1}{P(n)} O\{(n^{\delta})\} O\left\{ \int_{1/n}^{\pi} \left(\frac{P(1/t)}{t^{-\delta-\alpha+1}} \right)^q dt \right\}^{1/q} \right] \text{ देखें [2]} \\ &= O\left[\frac{1}{P(n)} O\{(n^{\delta})\} O\left\{ \int_1^n \frac{(P(y))^q}{y^{\delta q + q\alpha - q + 2}} dy \right\}^{1/q} \right] \\ &= O\left[\frac{1}{P(n)} O\{(n^{\delta})\} O\left\{ \frac{P(n)}{n^{\alpha + \delta + 1/q - 1}} \right\} \right]\end{aligned}$$

$$= 0 \left[\left\{ \frac{1}{n} \right\}^{\alpha+1/q-1} \right]$$

$$= 0 \left[\left\{ \frac{1}{n} \right\}^{\alpha-1/p} \right]$$

जहाँ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ जिससे कि $1 \leq p \leq \infty$.

टिप्पणी : प्रमेयिका 4 की सहायता से तथा $p \rightarrow \infty$ लेने पर यह देखा जा सकता है कि हमारी प्रमेय में प्रमेय B सम्मिलित है क्योंकि $0 < \alpha \leq 1$.

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डॉ० पी० एल० शर्मा, प्रोफेसर, गणित तथा सांख्यिकी विभाग, सागर विश्वविद्यालय को इस प्रपत्र की तैयारी में मार्ग दर्शन के लिए धन्यवाद देता है।

निर्देश

1. हिले, ई० तथा टर्मकिन, जे० डी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1932, 34, 757-783.
2. मकफैडेन, एल०, Duke Math. J., 1942, 9, 168-207.
3. कुरेशी, के०, विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1981, 24.
4. साहनी, बी० एन० तथा राव, वी० वी० जी०, Bull. Austral. Math. Soc., 1972, 6, 11-18.
5. साहनी, बी० एन० तथा गोयल, डी० एस०, Ranchi University Math. Jour., 1973, 4, 50-53.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 26, No. 4, 1983

स्थिर बिन्दु प्रतिचित्रणों के सम्बन्ध में

ए० के० यूएल तथा पी० एल० शर्मा

शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, बैतूल (म० प्र०)

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में फिशर की प्रमेयों के तरह की कुछ स्थिर बिन्दु प्रमेयों को स्वतः प्रतिचित्रण के लिये सिद्ध किया गया है।

Abstract

On fixed point mappings. By A. K. Yuel and P. L. Sharma, Government Post-graduate College, Betul (M. P.).

In this present paper we prove some fixed point theorms close in spirits to theorems of Fisher's [1], [2] for self-mapping f of X satisfying the rational expression as introduced by Dass and Gupta [3] and then, due to Pachpatte [4].

प्रमेय 1.

यदि S सतत प्रतिचित्रण हो और T स्वयं में पूर्ण दूरीक समष्टि (X, d) का प्रतिचित्रण हो जिससे परिमेय असमिका (rational inequality).

$$d(Sx, TSy) \leq a \frac{d(Sy, TSy)[1 + d(x, Tx)]}{1 + d(x, Sy)} + \beta d(x, Sy), \quad (1)$$

की तुष्टि X में समस्त x, y के लिये हो जहाँ

$$a + \beta < 1 \text{ समेत } a, \beta, \in (0, 1).$$

तब S तथा T में अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु पाया जाता है।

उपपत्ति :

माना कि X में कोई काल्पनिक बिन्दु x है तो (1) के द्वारा

$$\begin{aligned} d((ST)^n x, T(ST)^n x) &\leq \alpha \frac{d((ST)^n x, T(ST)^n x)[1 + d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^n x)]}{1 + d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^n x)} \\ &\quad + \beta d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^n x), \\ &\leq (\beta/1 - \alpha) d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^n x), \end{aligned}$$

अतः

$$\leq q d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^n x),$$

जहाँ

$$q = \beta/1 - \alpha < 1.$$

इसी प्रकार

$$d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^n x) \leq q d((ST)^{n-1} x, T(ST)^{n-1} x),$$

अतः यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$d((ST)^n x, T(ST)^n x) \leq q^{2n-1} d(Tx, STx),$$

तथा

$$d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^n x) \leq q^{2n-2} d(Tx, STx).$$

चूँकि $q < 1$, अतः इससे यह निकलता है कि अनुक्रम

$$\{x, Tx, STx, \dots, (ST)^n x, T(ST)^n x, \dots\}$$

X में कौशी अनुक्रम है। पुनश्च, X के पूर्ण दूरीक समष्टि होने से यह अनुक्रम X से सीमा z में अभिसरण करता है। इस प्रकार

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ST)^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(ST)^n x = z$$

दिया हुआ S संतत है अतः

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S[(ST)^n x] = Sz = z.$$

अतएव z स्थिर बिन्दु है S का। पुनः निम्नलिखित पर विचार करें

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &= d(Sz, TSz) \\ &\leq \alpha \frac{d(Sz, TSz)[1 + d(z, Sz)]}{1 + d(z, Sz)} + \beta d(z, Sz) \leq \alpha d(z, Tz), \end{aligned}$$

चूँकि $a < 1$ अतः $Tz = z$, इसलिये z उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है S तथा T का। अब मानें कि w एक अन्य उभयनिष्ठ बिन्दु है S तथा T का जहाँ X में $w (\neq z)$, तो

$$D(z, w) = d(Sz, TSw)$$

$$\leq a \frac{d(Sw, TSw)[1 + d(z, Sz)]}{1 + d(z, Sw)} + \beta d(z, Sw) \leq \beta d(z, w),$$

अतएव विरोध से $z = w$ । अतः z अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है S तथा T का। इस प्रकार उपपत्ति पूरी हुई।

जब $S = T$, तो हमें निम्नांकित उपप्रमेय प्राप्त होता है।

उपप्रमेय (1)

यदि T एक संतत प्रतिचित्रण हो स्वयं में पूर्ण दूरीक समष्टि का जिससे परिमेय असमिका

$$d(Tx, T^2y) \leq a \frac{d(Ty, T^2y)[1 + d(x, Tx)]}{1 + d(x, Ty)} + \beta d(x, Ty), \quad (2)$$

की तुष्टि X के समस्त $x, y, a + \beta < 1$ समेत $a, \beta \in (0, 1)$ के लिये होता है।

तब T में अद्वितीय स्थिर बिन्दु होता है।

टिप्पणी

(अ) जब $a = 0$, तो हमें फिशर का परिणाम^[2] प्राप्त होता है।

(ब) यदि हम इस प्रतिबन्ध को तोड़ दें कि प्रमेय (1) में S संतत है और तब $S = T$ रखें तो हम प्रमेय 1 उपपत्ति से देखेंगे कि तब भी $\{T^n x\}$ में कौशो अनुक्रम है और यदि अनुक्रम को X में z में अभिसरण करने दिया जाय, मान लो $z \neq Tz$ तो $d(z, Tz) > 0$ ।

तो

$$d(z, Tz) \leq d(Tz, T^n x) + d(Tz, T^n x)$$

$$\leq d(z, T^n x) + a \frac{d(T^{n-1}x, T^n x)[1 + d(z, Tz)]}{1 + d(z, T^{n-1}x)} + \beta d(z, T^{n-1}x),$$

यदि $n \rightarrow \infty$, होने दिया जाय तो $d(z, Tz) \leq 0$, अतएव विरोध से $Tz = z$ और तब प्रमेय 1 की ही तरह अद्वितीयता प्राप्त होती है। इस तरह हमने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की।

प्रमेय 2

यदि T एक पूर्ण दूरीक समष्टि X का प्रतिचित्रण हो जो समस्त x, y के लिये परिमेय असमिका (2) की X में तुष्टि करता हो जहाँ $\alpha + \beta < 1$ समेत $\alpha, \beta \in (0, 1)$ तो, T में अद्वितीय स्थिर बिन्दु पाया जाता है।

अब हम ऐसा प्रमेय सिद्ध करेंगे जो प्रमेय (1) का सार्वीकरण हो।

प्रमेय 3

माना कि S तथा T प्रतिचित्रण हैं स्वयं में पूर्ण दूरीक समष्टि X के जिसमें S अथवा T संतत होता है जिससे असमिका

$$d(Sx, TSy) \leq q \max \left\{ d(x, Sy), \frac{d(Sy, TSy)[1 + d(x, Sx)]}{1 + d(x, Sy)}, \right. \\ \left. 1/2 \frac{d(x, TSy)[1 + d(x, Sx) + d(Sy, Sx)]}{1 + d(x, Sy)} \right\} \quad (3)$$

की तुष्टि X में समस्त x, y के लिये होती है जहाँ $0 \leq q < 1$. तब S तथा T में उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु होता है।

उपपत्ति

माना कि x X में कोई काल्पनिक बिन्दु है। तो

$$d((ST)^n x, T(ST)^n x) \leq q \max \{ d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^n x); \\ \frac{d((ST)^n x, T(ST)^n x [1 + d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^n x)]}{1 + d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^n x)} \\ 1/2 \frac{d(T(ST)^{n-1} x, T(ST)^n x) [1 + d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^n x) + d((ST)^n x, (ST)^n x)]}{1 + d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^n x)} \} \\ \leq q \max \{ d(T(ST)^n x, (ST)^n x); d((ST)^n x, T(ST)^n x); \\ 1/2 [d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^n x) + d((ST)^n x, T(ST)^n x)] \}, \\ \leq q d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^{n-1} x), \text{ क्योंकि } q < 1.$$

इसी प्रकार

$$d(T(ST)^{n-1} x, (ST)^n x) \leq q d((ST)^{n-1} x, T(ST)^{n-1} x).$$

और इससे यह निकलता है कि

$$d((ST)^n x, T(ST)^n x) \leq q^{2n-1} d(Tx, STx),$$

तथा

$$d(T(ST)^{n-1}x(ST)^nx) \leq q^{2n-2}d(Tx, STx).$$

चूँकि $q < 1$, अतः अनुक्रम

$$\{x, Tx, STx, \dots, (ST)^nx, T(ST)^nx, \dots\}$$

पूर्ण दूरीक समष्टि X में कौशी अनुक्रम है। अतः X में उसका सीमा बिन्दु z है। इस प्रकार

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ST)^nx = \lim_{n \rightarrow \infty} T(ST)^nx = z$$

दशा (I)

अब मान लो कि S संतत है तो

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S[T(ST)^nx] = Sz = z$$

अतः z स्थिर बिन्दु है S का। अपरंच

$$d(z, Tz) = d(Sz, TSz),$$

पर विचार करें

$$d(z, Tz) \leq q \max \left\{ d(z, Sz); \frac{d(Sz, TSz)[1 + d(z, Sz)]}{1 + d(z, Sz)} \right\},$$

$$1/2 \frac{d(z, TSz)[1 + d(z, Sz) + d(Sz, Sz)]}{1 + d(z, Sz)} \leq q d(z, Tz)$$

चूँकि $q < 1$, अतः $Tz = z$ । इस प्रकार z उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है S तथा T का।

दशा (II)

अब ऐसी दशा लें जब T संतत हो, तो

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S[(T)^nx] = Tz = z,$$

अतः z स्थिर बिन्दु है T का। आगे भी यदि हम मान लें कि $z \neq Sz$, तो $d(z, Sz) > 0$ और विचार करें कि

$$\begin{aligned} d(z, Sz) &\leq d(z, T(ST)^nx) + d(Sz, T(ST)^nx); \\ &\leq d(x, T(ST)^nx) + q \max d(z, (ST)^nx); \end{aligned}$$

$$\frac{d(ST)^n x, T(ST)^n x [1 + d(z, Sz)]}{1 + d(z, (ST)^n x)} ;$$

$$1/2 \frac{d(z, T(ST)^n x) [1 + d(z, Sz) + d((ST)^n x, Sz)]}{1 + d(z, (ST)^n x)}$$

$n \rightarrow \infty$ होने पर हमें $d(z, Sz) \leq 0$ प्राप्त होता है अतः विरोध से $Sz = z$ अतः पुनः यह निष्कर्ष निकलता है कि z उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है S तथा T का। एकरूपता सिद्ध करने के लिये माना कि w एक अन्य उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है S तथा T का जहाँ $w (\neq z) \in X$, तो

$$d(z, w) = d(Sz, STw) \leq q \max \left\{ d(z, Sw); \frac{d(Sw, TSw) [1 + d(z, Sz)]}{1 + d(z, Sw)} ; \right.$$

$$\left. 1/2 \frac{d(z, TSw) [1 + d(z, Sz) + d(Sw, Sz)]}{1 + d(z, Sw)} \right\} ,$$

$\leq q d(z, w)$, जो कि पुनः विरोध है अतः $z = w$. इस प्रकार उपपत्ति पूरी हुई।

जब प्रमेय (3) में $S = T$ हो तो हमें निम्नलिखित उपप्रमेय प्राप्त होता है।

उपप्रमेय (3)

माना कि T संतत प्रतिचित्रण है पूर्ण दूरीक समष्टि X का, जिससे यह असमिका

$$d(Tx, T^2y) \leq q \max \left\{ d(x, Ty); \frac{d(Ty, T^2y) [1 + d(x, Tx)]}{1 + d(x, Ty)} ; \right.$$

$$\left. 1/2 \frac{d(x, T^2y) [1 + d(x, Tx) d(Ty, Tx)]}{1 + d(x, Ty)} \right\} ,$$

को X में समस्त x, y के लिये तुष्ट करता है जहाँ $0 \leq q < 1$. तब T का अद्वितीय स्थिर बिन्दु होता है।

निर्देश

1. फिशर, बी० Accad. Naz. Des Lincei Serie VIII 1977, LXII, 759-75.
2. वही, Maths. Japonica 1977, 22, 335-38.
3. दास, बी० के० तथा गुप्ता, एम०, Indian Jour. Pure App. Math. 1975, 6 1455-58.
4. पचपट्टे, बी० जी०, Ind. Jour. Pure Appl. Maths. (प्रकाशनार्थ)

धूलमय तरल का स्थायी समतल MHD प्रवाह

जनार्दन सिंह तथा एस० एन० सिंह
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी-5

[प्राप्त—मार्च 8, 1983]

सारांश

अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में अनन्त वैद्युत् चालकता से युक्त धूलमय तरल के स्थायी समतल प्रवाह का अध्ययन किया गया है। ऐसी दशा में जब धूल कणों का वेग सर्वत्र तरल के वेग के समान्तर रहता है कुछ महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त किये गये हैं। समान्तर सरल रेखाओं में प्रवाह तथा त्रिज्यीय प्रवाह की भी विवेचना की गई है।

Abstract

On steady plane MHD flow of a dusty fluid. By Janardan Singh and S. N. Singh, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi-5.

Steady plane flow of a dusty fluid with finite electrical conductivity in the presence of transverse magnetic field are studied. Some results of physical importance have been deduced for the case where the velocity of dust particles is everywhere parallel to that of fluid. Lastly, flow in parallel straight lines and radial flow are also discussed.

स्पूल^[7] ने देखा है कि यदि प्रक्षुब्ध गति में नली में से प्रवहमान वायु में धूल मिला दी जाय तो उसमें प्रतिरोध गुणांक काफी कम हो जाता है। सैफमैन^[1] ने धूलमय गैस के पटलीय प्रवाह के स्थायित्व का विस्तार से अध्ययन किया है। मिचेल^[2,3], चक्रवर्ती^[4] तथा सिंह इत्यादि^[5] ने धूलमय गैस के समतल समान्तर प्रवाह की खोज की है।

प्रस्तुत प्रपत्र में अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में अनन्त वैद्युच्चालकता से युक्त धूलमय तरल के स्थायी समतल प्रवाह का अध्ययन किया गया है। जब धूल कणों का वेग सर्वत्र तरल के वेग के समान्तर हो, उस दशा में कुछ महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त किए गये हैं। समान्तर सरल रेखाओं में प्रवाह तथा त्रिज्यीय प्रवाह की भी विवेचना की गई है।

गति का समीकरण

चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में अनन्त चालकता वाले असंपीड्य धूलमय तरल के स्थायी प्रवाह को नियन्त्रित करने वाले गति के मूलभूत समीकरण इस प्रकार हैं^[6]

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \mu \operatorname{Curl} \mathbf{H} \times \mathbf{H} + KN (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad (2)$$

$$\operatorname{Curl} (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} (N \mathbf{v}) = 0, \quad (5)$$

$$m(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}) = K(\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad (6)$$

जहाँ $\mathbf{H}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, p , ρ , तथा μ क्रमशः चुम्बकीय क्षेत्र सदिश, तरल का वेग, धूल का वेग, तरल दाब, तरल घनत्व तथा चुम्बकीय प्रवेश्यता हैं। m द्वारा धूल के प्रत्येक कण का द्रव्यमान, N द्वारा धूल कणों का संख्या घनत्व तथा k द्वारा धूल कण का स्टोक्स प्रतिरोध गुणांक प्रदर्शित हुआ है।

(x, y) तल पर समतल अनुप्रस्थ प्रवाह की दशा में $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ तथा $\partial/\partial z = 0$ ऐसे प्रवाहों के लिए समीकरण (2) तथा (3) क्रमशः

$$\rho (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} + \nabla \left(p + \frac{\mu H^2}{2} \right) = KN (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad (7)$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{u} H) = 0, \quad (8)$$

में समानीत हो जाते हैं जहाँ $H = |\mathbf{H}|$

समीकरण (7) से स्पष्ट है कि बल को कुल दाब

$$p = p + \frac{\mu H^2}{2}$$

से ज्ञात किया जाता है। समीकरण (1) तथा (8) से

$$H = f \quad (9)$$

जहाँ f अदिश फलन है जिससे $\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} f = 0$ की तुष्टि होती है।

जिस परिस्थिति के लिये तरल तथा धूल कणों के वेग सभी तरह समान्तर हैं उन्हें निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है।

$$\mathbf{v} = \frac{\alpha}{N} \mathbf{u} \quad (10)$$

जहाँ α कोई अदिश है जिससे

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad } \alpha = 0 \quad (11)$$

की तुष्टि होती है जिसका अर्थ है कि α तरल की धारा रेखाओं पर स्थिर रहता है।

माना कि $\psi(x, y) = \text{const.}$ वक्रों का परिवार धारा रेखाओं को तथा $\phi(x, y) = \text{const.}$ उनके लाम्बिक प्रक्षेप पथों को प्रदर्शित करते हैं। प्राकृतिक निर्देशांक पद्धति (ϕ, ψ) में $g_1(\phi, \psi) d\phi$ तथा $g_2(\phi, \psi) d\psi$ को लम्बाई के सदिश तत्व के अवयवों के रूप में होने से किसी वक्र पर चाप लम्बाई के गति तत्व को निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जाता है।

$$ds^2 = g_1^2(\phi, \psi) d\phi^2 + g_2^2(\phi, \psi) d\psi^2 \quad (12)$$

जहाँ g_1 तथा g_2 मीटरी गुणांक हैं जो गॉस समीकरण (13) की तुष्टि करते हैं

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{g_1} \frac{\partial g_2}{\partial \phi} \right] + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{1}{g_1} \frac{\partial g_2}{\partial \psi} \right] = 0. \quad (13)$$

इस प्राकृतिक निर्देशांक पद्धति में समीकरण (6)

$$\left(\frac{\alpha}{N} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \frac{\alpha^2}{N} q^2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{N} \right) = \frac{k}{m} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{N} \right\} g_1 q \quad (14)$$

$$\left(\frac{\alpha}{N} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \left(\frac{\alpha}{N} \right)^2 q g_1^{-1} \frac{\partial}{\partial \psi} (g_1 q) = 0. \quad (15)$$

हो जाता है। समीकरण (15) तुरन्त $\partial g_1 / \partial \psi = 0$ में समानीत हो जाता है। इसके प्रयोग से प्रवाह को नियन्त्रित करने वाले समीकरण निम्नलिखित⁶¹ समीकरणों में समानीत हो जाते हैं।

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (g_2 q) = 0, \quad (16)$$

$$\alpha = \alpha(\psi) \quad (17)$$

$$\rho q \frac{\partial q}{\partial \phi} + \frac{\partial \rho}{\partial \phi} = K \left(\frac{\alpha}{N} - 1 \right) g_1 N q, \quad (18)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \quad (19)$$

$$g_1 = g_1(\phi) \quad (20)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \phi} + N q \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{N} \right) = \left(\frac{N}{\alpha} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{\alpha}{N} \right\} g_1 \quad (21)$$

तथा

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (g_1 q^{-1}) = 0, \quad (22)$$

जहाँ $q = |u|$ प्रवाह के वेग का परिमाण है।

प्रमेय 1. अनन्त चालक असंपीड्य धूलमय तरल के स्थायी प्रवाह में यदि धूल कणों का वेग सर्वत्र तरल कणों के समान्तर हो तो प्रवाह को त्रिज्यीय प्रवाह या समान्तर सरल रेखाओं में होना चाहिए।

उपपत्ति : माना (ϕ, ψ) कोण है जो तरल की धाराओं तथा x -अक्ष के मध्य है। तो

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = -g_2^{-1} \frac{\partial g_1}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = g_1^{-1} \frac{\partial g_2}{\partial \phi}$$

(20) के अनुसार हम देखते हैं θ केवल ψ का फलन है। अतः प्रत्येक धारा रेखा $\psi = \text{const.}$ x -अक्ष के साथ स्थिर कोण बनाती है जिसमें या तो त्रिज्यीय प्रवाह होता है या समान्तर सरल रेखीय प्रवाह।

3. सम्भव ज्यामितिक के हल

A समान्तर सरल रेखाओं में प्रवाह

हमें ज्ञात है कि $g_1 = g_2 = 1$ । समीकरण (16) तथा (19) से

$$p = q(\psi) \quad (24)$$

तथा

$$p = p(\phi) \quad (25)$$

समीकरण (18) तथा (21) क्रमशः

$$\frac{\partial P}{\partial \phi} = k\{a/N - 1\} Nq(\psi) \quad (26)$$

तथा

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (1/N) = (k/m) a^{-2} \{1 - a/N\} Nq^{-1} \quad (27)$$

में समानीत हो जाते हैं।

दशा (i) : माना कि N एक अचर है या केवल ψ का फलन है तब (27) का अर्थ होगा $a/N = 1$, जिसमें से (26) के द्वारा

$$\frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 = \frac{\partial P}{\partial \psi} \quad (28)$$

अतः प्रवाह समदाबी है।

समतल MHD प्रवाह

दज्ञा (ii) : माना कि N फलन है ϕ तथा ψ का, तो समीकरण (27) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$N^{-2}\{a - N^{-1}\} \frac{\partial N}{\partial \phi} = (k/m) a^{-2} q^{-1} \quad (29)$$

यह ध्यान रखते हुये कि $a \neq N$, (29) समाकलित करने पर

$$\ln \left\{ \frac{a}{N} - 1 \right\} + a/N = -(k/m) q^{-1}(\phi) + g^*(\psi) \quad (30)$$

जहाँ g^* यादृच्छिक फलन है।

(B) त्रिज्यीय प्रवाह

इस अनुभाग में समतल त्रिज्यीय प्रवाह का अध्ययन करेंगे। इसके लिये हम ध्रुवीय-निर्देशांक पद्धति (R, θ) को चुनते हैं जिससे कि

$$R = \phi = d_1 \quad 0 < d_1 < \infty$$

समलाम्बिक प्रक्षेप पथ हैं तथा

$$\theta = \psi = d_2 \quad 0 \leq d_2 < 2\pi$$

धारा रेखाएँ हैं। इस जाल (net) के लिये चाप लम्बाई का वर्ग

$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2, \quad (31)$$

द्वारा दिया जाता है तथा t_{so} मीटरी गुणांक

$$g_1(R, \theta) = 1 \quad \text{तथा} \quad g_2(R, \theta) = R \quad (32)$$

समीकरण (10), (18) तथा (19) में (32) का सम्प्रयोग करने पर

$$Rq = \xi(\theta) \quad (33)$$

$$\rho q \frac{\partial q}{\partial R} + \frac{\partial P}{\partial R} = KN(a/N - 1)q \quad (34)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad (35)$$

जहाँ $\xi(\theta)$ एक यादृच्छिक फलन है θ का।

(21) में (32) का उपयोग करने पर

$$N \frac{\partial}{\partial R} 1/N = (K/m) a^{-2} (N - a) N R \frac{1}{\xi(\theta)} + R^{-1} \quad (36)$$

दशा (i) : $N = \text{const.}$ अथवा $N = N(\theta)$ केवल । इस दशा में (36) या तो

$$(i) (k/m) a^{-2} (N - \alpha) N [\xi(\theta)]^{-1} = -R^{-2} \text{ के लिये}$$

अथवा

$$(ii) \xi(\theta) = 0 \text{ के लिये प्रयुक्त है ।}$$

स्पष्ट है कि दशा (i) सम्भव नहीं है क्योंकि वाम पक्ष केवल θ का फलन है तथा दशा (ii) से यह अर्थ निकलता है कि $q = 0$

प्रमेय 2

अनन्त चालक असंपीड्य धूलमय तरल के लिए कोई स्थायी समतल त्रिज्यीय प्रवाह विद्यमान नहीं है जिसके लिये धारा रेखाओं पर या कि समग्र प्रवाह स्थिर हो ।

दशा (ii) : माना

$$N = N(R, \theta)$$

माना

$$N(R, \theta) = F(R)G(\theta),$$

तो समीकरण (35) तथा (36) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है ।

$$P = g(R) \quad (37)$$

$$R^{-2} \xi^2(\theta) = Rg(R) + K\rho^{-1}F(R)G(\theta)\xi(\theta) - K\rho^{-1}\alpha(\theta)\xi(\theta) \quad (38)$$

समस्त R तथा θ के लिए समीकरण (38) लागू होने के लिये या तो (i) $Rg'(R)$, $F(R)$ तथा -1 के अनुपात को स्थिर होना चाहिये या (ii) 1 , $K\rho^{-1}G(\theta)\xi(\theta)$ तथा $K\rho^{-1}\alpha(\theta)\xi(\theta)$ में से दो का अनुपात स्थिर होना चाहिए । इनमें से दशा (i) सम्भव नहीं है क्योंकि इसका अर्थ होगा कि N फलन है केवल (प्रमेय 2 से) । अतः दशा (ii) के अनुप्रस्थ कल्पना करेंगे कि

$$K\rho^{-1}G(\theta)\xi(\theta) = a_1, K\rho^{-1}\xi(\theta) = a_2, G = a_3\alpha(\theta)$$

जिससे

$$\alpha(\theta) = a_2\rho k^{-1}\xi^{-1}(\theta), G(\theta) = a_3\alpha(\theta) \quad (39)$$

अतः $N(R, \theta) = a_3\alpha(\theta)F(R)$ जहाँ a_1, a_2, a_3 अचर हैं ।

(39) के प्रयोग के समीकरण (36) का रूप

$$-F'(R)/F(R) = (k/m) a_3[\xi(\theta)]^{-1}[a_3F(R) - 1]^{-1}RF(R) + R^{-1} \quad (40)$$

हो जाता है जो

$$F'(R)[RF^2(R)\{1-a_3F(R)\}]^{-1}+[R^2F(R)\{1-a_2F(R)\}]^{-1} \\ = (k/m) a_3[\xi(\theta)]^{-1}=a_4 \quad (41)$$

के प्रदान करता है। इस तरह

$$\xi(\theta)=(k/m) a_3/a_4=\text{const.} \quad (42)$$

$$\alpha(\theta)=\rho m K^{-2} a_2 a_4 a_3^{-1}=\text{const.}$$

$$N(R, \theta)=m K^{-2} a_2 a_4 F(R)$$

जहाँ $F(R)$ निम्नलिखित आरैखिक सामान्य अवकल समीकरण का हल है

$$F' + 1/R F = a_4 R F^2 (1 - a_3 F).$$

$F(R)$ प्राप्त करने के बाद (39), (42) तथा (38) से $g(R)$ को ज्ञात किया जा सकता है। इस तरह कुल दाब P ज्ञात हो सकता है और फिर (9) से तरल दाब

$$p = P - \frac{\mu f^2}{2}$$

भी ज्ञात हो सकता है। इसी तरह हम

$$N(R, \theta) = F(R) + G(\theta)$$

के लिये भी प्रवाह चरों की गणना कर सकते हैं।

निर्देश

1. सैफमैन, पी० जी०, J. Fluid Mechanics, 1962 **13**, 120-28.
2. मिचेल, डी० एच०, J. Fluid Mech., 1968 **31**, 175-92.
3. मिचेल, डी० एच० तथा मिलर, डी० ए०, Mathematika, 1966, **13**, 97-107.
4. चक्रवर्ती, के० एम०, AIAA Journal, 1974, **12**, 1136-37.
5. सिंह, एस० एन०, गंगवार, एस० एस० तथा राम बाबू, IL Nuovo Cimento, 1981, **65**, B (2) 419-25.
6. लैम्ब, एच०, Hydrodynamics, न्यूयार्क 1949.
7. स्पूल, डब्लू० टी०, Nature, 1961, **190**, 976.



पृथक्करणीय बानाख अवकाश में अनन्त विभाज्य वितरण

ए० आर० चौरसिया

जी० आर० मेडिकल कालेज, ग्वालियर

[प्राप्त—अप्रैल 9, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में पृथक्करणीय बानाख अवकाश में विभाज्य वितरणों का निरूपण प्राप्त किया गया है।

Abstract

Infinitely divisible distributions in separable Banach space. A. R. Chaurasia, G. R. Medical College, Gwalior.

The aim of this paper is to obtain a representation of infinitely divisible distributions in a separable Banach space.

1. प्रस्तावना

सामान्य मीटरी अवकाशों में अनन्त विभाज्य वितरणों (अ० वि०) का निरूपण प्राप्त करने की समस्या अभी तक नहीं सुलझी है। लेबी तथा खिनचिन ने 1962 में इस दिशा में कार्य प्रारम्भ किया जिसका विस्तार पार्थसारथी आदि ने तथा पुनः वरधन ने किया। चौरसिया^[1] ने इसका आगे विस्तार किया। प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य चौरसिया^[1] तथा वरधन^[2] के परिणामों को विभाज्य बानाख अवकाश के लिए विस्तीर्ण करना है। अनुभाग 3 में ऐसा किया गया है जबकि अनुभाग 2 में कुछ परिभाषाएँ दी गई हैं।

2. प्रारम्भिक बातें

माना कि X विभाज्य बानाख अवकाश है और X^* इसका द्वैत अवकाश है। माना कि $U_x X$ के उपसेटों की सिलिडरी σ -बीजावली है और (X, U^*) पर समस्त वितरणों का संवलन अर्द्ध समूह M है। हम x पर X^* के मान को (x, x^*) द्वारा प्रदर्शित करते हैं और माना कि $\|\cdot\|$ X पर मानक है।

परिभाषा 2.1

प्रत्येक $\mu \in M$ के लिए अभिलक्षण फलन (अ० फ०) $\mu(y)$ को X पर

$$\mu(y) = \exp [-(Rx, y)] = \int_X e^{i(x, y)} d\mu(x) \quad (2.1)$$

के द्वारा परिभाषित किया जाता है। $y \in X^*$ यहाँ पर R अनृण संमित संतत रैखिक आपरेटर है X^* से X^{**} में और वितरण का सहप्रसरण आपरेटर कहलाता है।

परिभाषा 2.2

माना कि F X पर नितान्त सान्त मापों का एक अनुक्रम है। हम कहेंगे कि F_n दुर्बल* अर्थ में अभिसरण करता है F_* में ($F \Rightarrow F_*$) यदि किसी वास्तविक चर के समस्त बद्ध संतत फलनों f के लिए तथा समस्त रैखिक फलनों $\xi(x)$ के लिए

$$\int_X f(\xi(x)) dF_n \rightarrow \int_X f(\xi(x)) dF \quad (2.2)$$

यदि $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_x$ X पर कोई K रैखिक फलन हों और यदि A_K बोरेल सेट है जो यूक्लेडियन अवकाश R_K में है तो

$$A = \{x/\xi_1(x), \dots, \xi_K(x) \in A_K\} \quad (2.3)$$

एक सिलिंडर सेट है। संकेतनों को सरल करने की दृष्टि से हम लिखेंगे

$$\xi = \xi^{(K)} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_x\}$$

तथा

$$A = \xi^{-1}(A_K)$$

हम दो प्रकार के सिलिंडर सेटों की σ -बीजावली पर अपना ध्यान केन्द्रित करेंगे। वे या तो (2.2) के समस्त सिलिंडर सेटों वाले होंगे जो k के समस्त मानों, रैखिक फलनों के समस्त सेटों तथा समस्त बोरेल सेट A के लिए परिभाषित होंगे अथवा विकल्प रूप में रैखिक फलनों के एक समुच्चय रूप में होंगे जो कि परिभाषा में पाये जाते हैं और वे एक दिये हुये अनुक्रम

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k, \dots \quad (2.4)$$

के सान्त सेट तक सीमित होंगे जो मानक एक के रैखिक फलन होंगे और त्रिज्या एक के गोले पर X^* में घन होंगे और ऐसे होंगे कि इनकी कोई भी सान्त संख्या रैखिक रूप से आश्रित है।

किसी दिये रैखिक फलन ξ तथा वास्तविक घन संख्या a के लिए हम लिखेंगे—

$$K(\xi, a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup F_n(x/|\xi(x)| \geq a)$$

हम कहेंगे कि अनुक्रम $\{F_n\}$ प्रतिबन्ध (A) की तुष्टि करता है यदि हम प्रत्येक $\epsilon > 0$ के लिए एक (δ) प्राप्त कर सकें जो δ से स्वतन्त्र हो जिससे कि

$$K(\delta, a) < \epsilon$$

समस्त δ के लिए $\|\delta\|=1$ सहित। तब हमें परिभाषा 2.2 की निम्नलिखित वैकल्पिक परिभाषा प्राप्त होगी

परिभाषा 2.3

अनुक्रम $\{F_n\}$ दुर्बल रूप से F में अभिसरण करता है यदि यह प्रतिबन्ध (A) की पूर्ति करे और यदि

$$\int_x f(\phi(x)) aF_n \rightarrow \int_x f(\phi(x)) aF$$

जो (2.3) के समस्त सान्त संचय तथा एक वास्तविक चर के समस्त बद्ध संतत फलनों f के लिए हो।

परिभाषा 2.4

यदि F X पर कोई पूर्णतया सान्त माप हो तो इससे संबद्ध वितरण $\mu = e(F)$ को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया जाता है

$$\mu = e(F) = e^{-F(x)} [1 + F + F^2/2! + \dots]$$

स्पष्ट है कि

$$\mu(y) = e(F)(y) = [\int [(x, y) - 1] dF]$$

परिभाषा 2.5

वितरण μ अ० वि० होता है यदि समस्त n के लिए $X_n \in X$ तथा $\lambda_n \in M$ विद्यमान हो जिससे कि

$$\mu = \lambda_n^n X_n$$

पार्थसारथी ने^[3] निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किये हैं।

प्रमेय 2.1

अ० वि० नियम समस्त वितरणों के मध्य एक बद्ध उप अर्ध समूह बनाते हैं।

प्रमेय 2.2

यदि $\mu(y)$ किसी अ० वि० नियम μ का अ० फ० हो तो $\mu(y)$ लुप्त नहीं होता।

प्रमेय 2.3

$\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ यदि और केवल यदि $\mu_n(y) \rightarrow \mu(y)$.

उपपत्ति

यह प्रमेय परिभाषा (2.2) का प्रत्यक्ष परिणाम है क्योंकि $\exp i(x, y)$, $y \in X^*$ का रूप $f(\xi(x))$ है जहाँ f एक वास्तविक चर का बद्ध संतत फलन है और ξ एक रैखिक फलन है।

प्रमेय 2.4

माना $\{F_n\}$ नितान्त सान्त मापों का ऐसा अनुक्रम है कि प्रतिबन्ध (A) की तुष्टि हो। तब

$$\sup_n \int_{\|x\| \leq 1} \|x\|^2 dF_n < \infty$$

उपपत्ति

हम कल्पना करते हैं कि प्रत्येक $\{F_n\}$ इकाई गोलक के बाहर लुप्त हो जाता है क्योंकि अन्यथा हम F_n के बजाय इकाई गोलक के F_n प्रतिबन्ध पर विचार कर सकते हैं। माना $M_n = F_n + F_n$. हम दिखावेंगे कि M_n समान रूप से बद्ध है। हम कल्पना करते हैं M_n का कुल द्रव्यमान एक पूर्ण संख्या है। अन्यथा माना कि $M_n = M_n^{(1)} + M_n^{(2)}$ जहाँ $M_n^{(1)}$ संमित है कुल समाकल द्रव्यमान के तथा $M_n^{(2)}$ का कुल द्रव्यमान इकाई से कम है अतः

$$\int_{\|x\| \leq 1} \|x\|^2 dM_n^{(2)} < 1$$

एवं यह प्रदर्शित कर देना पर्याप्त है कि

$$\sup_n \int_{\|x\| \leq 1} \|x\|^2 dM_n^{(1)} < \infty$$

चूँकि $M_n^{(1)}$ का कुल द्रव्यमान एक पूर्णांक है, मान लो कि K_n तो

$$M_n^{(1)} = F_{n_1} + F_{n_2} + \dots + F_{n_{K_n}}$$

जहाँ F_{n_j} क्योंकि $j=1, 2, \dots, K_n$ इकाई गोलक में संमित सम्भाव्यता परिमाण हैं।

माना कि

$$\mu_n = F_{n_1}, F_{n_2}, \dots, F_{n_{K_n}}$$

चूँकि प्रत्येक F_{n_j} संमित है और शून्य प्रत्याशा वाला है अतः

$$\int \|x\|^2 d\mu_n = \sum_{j=1}^{K_n} \int \|x\|^2 dF_{n_j} = \int \|x\|^2 dM_n^{(1)}$$

अतः यह दिखाना पर्याप्त होगा कि

$$\sup_n \int \|x\|^2 d\mu_n < \infty$$

यदि कोई माप μ X पर और फिर किसी $\epsilon > 0$ पर परिभाषित हो तो हम एक संहति सेट S_ϵ प्राप्त कर सकते हैं जिससे कि

$$\mu(X - S_\epsilon) < \epsilon$$

अतः यह दिखाना पर्याप्त होगा कि

$$\int_{S_\epsilon} \|x\|^2 d\mu < \infty$$

माना कि ξ कोई रैखिक फलन है और यदि हम लिखें कि

$$\xi_{\xi, a} = \{x / |\xi(x)| \geq a\}$$

माना

$$T = \sup_t |f(x)|$$

तो ξ ऐसा चुनाव a होवे कि

$$\sup \mu_n(\xi_{\xi, a}) < \epsilon/T$$

अब $f(t)$ संतत है $|t| \leq a$ के लिए जिससे हम δ ज्ञात कर सकते हैं जिससे कि $|t_1 - t_2| < \delta$, $|t_1| \leq a$, $|t_2| \leq a \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \epsilon$. अब ϕ को ऐसा चुनें कि $\|\xi - \phi\| < \delta/a$ और लिखें $\mu(x) = \xi(ax/\delta) - \phi(ax/\delta)$ तो $\|\eta\| < 1$ अब $\eta_1 = \eta/\|\eta\|$ लिखें। η_1 एक रैखिक फलन है जिसका मानक एक है जिससे कि $|\eta(y)| \leq |\eta_1(y)|$ अतः

$$\mathcal{E}_{\eta, a} \subset \mathcal{E}_{\eta_1, a}$$

और चूँकि प्रतिबन्ध (A) की पूर्ति होती है

$$\mu_n(\mathcal{E}_{\eta, a}) < \epsilon/T$$

$$\mu_n(\mathcal{E}_{\eta, a}) < \epsilon/T$$

तथा

$$\mu_n(\mathcal{E}_{\phi, a}) < \epsilon/T$$

अब $S_\epsilon = \mathcal{E}_{\eta, a} \cup \mathcal{E}_{\xi, a} \cup \mathcal{E}_{\phi, a}$ रखें तो

$$\mu_n(S_\epsilon) < 3\epsilon/T$$

इस प्रकार प्रमेय सिद्ध हुई।

3. मुख्य परिणाम

प्रमेय 3.1

माना कि प्रत्येक n के लिए $\mu_n e(F_n)$ के रूप में हो जहाँ F_n पूर्णतः सान्त माप है। माना $\mu_n \neq X_n \Rightarrow \mu$ जो कतिपय उपयुक्त चुने तत्वों $X_n \in X$ के लिए है। हम यह भी कल्पना करते हैं कि F_n बढ़ रहा है तो F_n एक माप F तक बढ़ता जाता है जो σ -सान्त हो सकता है किन्तु मूल बिन्दु के प्रत्येक परिवेश के बाहर सान्त द्रव्यमान देता है जिसके लिए

$$\int_{\|x\| \leq 1} \|x\|^2 dF < \infty$$

इसके अतिरिक्त

$$\mu(y) = \exp [i(x_0, y) + \int k(x, y) dF]$$

जहाँ

$$k(x, y) = e^{i(x, y)} - 1 - \frac{i(x, y)}{1 + \|x\|^2}$$

और X_0 स्थिर तत्व है X का।

उपपत्ति

माना

$$\lambda_n(y) = \exp [\int k(x, y) dE_n]$$

अब

$$\int k(x, y) dF_n = \int_{\|x\| \leq 1} k(x, y) dF_n + \int_{\|x\| > 1} k(x, y) dF_n$$

माना कि F_n की सीमा F है तब F मूलबिन्दु के प्रत्येक परिवेश के बाहर सान्त होता है और

$$\int_{\|x\| \leq 1} \|x\|^2 dF < \infty$$

चूँकि

$$k(x, y) \leq 2 + \frac{\|x\| \|y\|}{1 + \|x\|^2} \leq 2 + \|y\|$$

$$\Rightarrow \sup_y \left| \int_{\|x\| > 1} k(x, y) dF_n - \int_{\|x\| > 1} k(x, y) dF \right| \rightarrow 0 \quad \text{ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty$$

यदि $\|x\| \leq 1$ तो

$$k(x, y) < |e^{i(x, y)} - 1 - i(x, y)| + \frac{|(x, y)| \|x\|^2}{1 + \|x\|^2}$$

$$\leq \frac{1}{2} (x, y)^2 + (x, y) \|x\|^2$$

$$\leq \frac{1}{2} \|x\|^2 \|y\|^2 + \|y\|^2 \|x\|^2$$

अतः

$$\sup_y \left| \int_{\|x\| \leq 1} k(x, y) dF_n - \int_{\|x\| \leq 1} k(x, y) dF \right| \rightarrow 0 \quad \text{ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \sup_y |\lambda_n(y) - \lambda(y)| \rightarrow 0 \quad \text{ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lambda_n \xrightarrow{*} \lambda$$

तथा प्रमेय सिद्ध हुई ।

प्रमेय 3.2

माना $\mu(y)$ एक फलन है जिसका रूप

$$\mu(y) = \exp \left[\int k(x, y) dF \right]$$

एक σ -सान्त माप है जो इकाई गोले के बाहर सान्त द्रव्यमान प्रदान करती है जिसके लिए

$$\int_{\|x\| \leq 1} \|x\|^2 dF < \infty$$

तो $\mu(y)$ अ० वि० नियम का अ० फ० है ।

उपपत्ति

माना कि N_n द्वारा मूलबिंदु के चारों ओर $1/n$ त्रिज्या का गोला सूचित होता है और F_N प्रतिबंध है F का N_n तक । माना कि

$$\mu_n(y) = \exp \left[\int k(x, y) dF_N \right]$$

तो प्रमेय 3.1 से

$$\sup_y |\mu_n(y) - \mu(y)| \rightarrow 0 \quad \text{ज्यों-ज्यों } n \rightarrow \infty$$

और यह प्रमेय प्रमेय 2.1 तथा 2.3 की तरह होती है ।

अब निम्न रूप के फलनों पर विचार करेंगे

$$\psi(y) = i(x_0, y) - (Rx, y) + \int k(x, y) dF$$

जहाँ F प्रमेय 3.2 में परिभाषित F के समान है।

प्रमेय 3.3

प्रत्येक $e\psi$ अ० वि० अ० फ० है।

उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि

$$\begin{aligned} e\psi &= \exp [i(x_0, y) - (Rx, y) + \int k(x, y) dF] \\ &= \exp [i(x_0, y) - (Rx, y)] \cdot \exp [\int k(x, y) dF] \end{aligned}$$

अतः प्रमेय 3.2 की दृष्टि से यह दिखाना पर्याप्त होगा कि $[i(x_0, y) - (Rx, y)]$ अ० वि० है। अब हम

$$\lambda(y) = \exp [i(x_0, y) - (Rx, y)]$$

पर विचार करें तो $[i(x_0, y) - (Rx, y)]$ अ० फ० का लाग है और उसी तरह $\lambda_n(y) = [i(x_0/n, y) - (Rx/n, y)]$ $\lambda_n = \lambda^{1/n}$ के संगत है। अतः यदि $\mu(y) = e\psi$ तो $\mu(y)$ गुणनफल है तो अ० वि० अ० फ० का अतः यह स्वयं अ० वि० है।

प्रमेय 3.4

माना $\gamma = (x_0, y) + i(Rx, y)$ यदि $\gamma_n \rightarrow \gamma$ तथा $F_n \xrightarrow{*} F$ तो $\psi_n \rightarrow \psi$ ।

विलोमतः यदि $\psi_n \rightarrow g$ मूलबिंदु पर संतत हो तो $\gamma_n \rightarrow \gamma$ तथा $F_n \xrightarrow{*} F$ जिससे कि $g = \psi$ ।

उपपत्ति : चूँकि

$$\begin{aligned} F_n &\xrightarrow{*} F \\ &\Rightarrow \int f(\xi(x)) dF_n \rightarrow \int f(\xi(x)) dF \end{aligned}$$

तथा $f(\xi(x)) = k(x, y)$ लेने पर यदि अंशतः सिद्ध हो जाता है क्योंकि $\psi_n \rightarrow \psi$ ।

विलोमतः चूँकि $\psi_n \rightarrow g$ अतः प्रमेय 2.1 से ज्ञात है कि $e\psi$ अ० फ० है यदि $e\psi \neq 0$ अतः यह X पर सान्त तथा संतत है। अतः

$$\int k(x, y) dF_n \rightarrow \int k(x, y) dF$$

$$\Rightarrow F_n \xrightarrow{*} F$$

जिससे

$$i\gamma_n = \psi_n - \int k(x, y) dF_n$$

$$\rightarrow g - \int k(x, y) d\Gamma = i\gamma.$$

इस प्रकार प्रमेय सिद्ध हुई।

प्रमेय 3.5 (निरूपण)

अ० वि० अ० फ० का परिवार e^ψ रूप वाले अ० फ० परिवार से संपाती होता है।

उपपत्ति : प्रमेय 3.3 से प्रत्येक e^ψ अ० वि० अ० फ० है।

विलोमतः माना कि $\mu(y)$ अ० वि० अ० फ० वितरण μ के संगत है तो

$$\mu = \lambda_n^n * x_n$$

$$= \lambda * x_n, \quad \lambda = \lambda_n^n$$

$$\Rightarrow \mu(y) = \lambda(y) \cdot \int e^{i(x_n, y)} d\mu$$

$$= \lambda(y) \cdot \exp [-(Rx_n, y)]$$

[परिभाषा 2.1 से]

अब गेडेन्को^[4] के अनुसार हम लिख सकते हैं कि

$$\log \lambda(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} n[\lambda_n(y) - 1]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n[\int (e^{i(x, y)} - 1) dM_n]$$

जहाँ M_n पूर्णतः सान्त माप है जो λ_n से सम्बन्ध $\lambda_n = e(M_n)$ द्वारा जुड़ी है

$$= \lim_n \left[\int \frac{i(x, y)n}{1 + \|x\|^2} dM_n \right.$$

$$\left. + \int \left(e^{i(x, y)} - 1 - \frac{i(x, y)}{1 + \|x\|^2} \right) n dM_n \right]$$

अतः

$$\begin{aligned}
 \log \lambda(y) &= \lim_n \left[\int \frac{i(x, y)n}{1+||x||^2} dM_n + \int k(x, y)n dM_n \right] \\
 &= \lim_n \left[\int \frac{i(x, y)}{1+||x||^2} dF_n + \int k(x, y) dF_n \right] \\
 &= \left[\int \frac{i(x, y)}{1+||x||^2} dF + \int k(x, y) dF \right]
 \end{aligned}$$

जहाँ $dF_n = n dM_n$ तथा $F_n^* \Rightarrow F$.

अतः

$$\begin{aligned}
 \log \mu(y) &= \int \frac{i(x, y)}{1+||x||^2} dF - (Rx, y) + \int k(x, y) dF \\
 &= \text{कोई } \psi
 \end{aligned}$$

इस प्रकार प्रमेय सिद्ध हुई ।

प्रमेय 3.6

ψ तथा युग्म (ν, F) के मध्य एक-एक की संगति है ।

उपपत्ति

परिभाषा के अनुसार प्रत्येक (ν, F) से ψ निर्धारित होता है । विलोमतः प्रमेय 3.3 से $e\psi$ अ० फ० है । अतः विलोमतः सूत्र से वितरण μ निर्धारित होता है और चूँकि $\mu = e(F)$ अतः अपनी पारी में यह F को निर्धारित करता है । अन्त में F तथा ψ से ν निर्धारित होता है और प्रमेय सिद्ध हो जाती है ।

निर्देश

1. चौरसिया, ए० आर०, विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1977, 21, 47-57
2. वरधन, एस० आर० एस०, संख्या, 1962, 24
3. पार्थसारथी, के० आर०, Probability Measures on Metric Spaces एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क 1968
4. गेडेन्को, बी० वी०, Probability Theory, मीर प्रकाशन, मास्को, 1973, पृ० 271
5. वैद्य, एम०, संख्या, 1963, 30
6. लोएवे, एम०, Probability Theory, वान नास्ट्रांड, न्यूयार्क, 1963

१०
री
हो

स,

Entered in Database

[Signature]
Signature with Date

21-9-07

